数字信号处理
Digital Signal Processing

付中华
mailfzh@nwpu.edu.cn
http://www.nwpu-aslp.org/gary/

第五部分
平稳随机信号及功率谱估计

- 1. 随机信号及其特征描述
- 2. 平稳随机信号
- 3. 平稳随机信号经过线性系统
- 4. 平稳随机信号的各态遍历性
- 5. 功率谱估计概述
- 6. 信号处理中的最小平方估计问题

1. 随机信号及其特征描述

- 确定性信号与随机信号
  - 随机信号不能通过一个确切的数学公式来描述，也不能准确预测
  - 随机信号只能在统计意义上研究
    - 电子线路中的噪声与干扰
    - 建筑物所受风载
    - 海浪的冲击
    - 生物医学信号(心电图ECG\脑电图EEG\肌电图EMG\心音图PCG等)
    - 语音信号

随机变量－>随机矢量－>随机信号

1. 随机信号及其特征描述

- 随机变量
  - 用随机变量来描述随机事件：
    - 连续型随机变量、离散型随机变量
    - 描述随机变量一般用
      - 分布函数

X是随机变量，x是某个样本的值或一次实现

$$P(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$$

$$0 \le P(x) \le 1, P(-\infty) = 0, P(\infty) = 1, P(x) \le P(y)\ (if\ \ x < y)$$

      - 概率密度（pdf）

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}\,P(x)}{\mathrm{d}\,x} \Leftrightarrow P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(v)\,\mathrm{d}\,v$$

$$p(x) \ge 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}\,x = 1, P(b) - P(a) = \int_{a}^{b} p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

      - 数字特征

1. 随机信号及其特征描述

- 随机变量
  - 用随机变量来描述随机事件：
    - 连续型随机变量、离散型随机变量
    - 描述随机变量一般用
      - 分布函数
      - 概率密度
      - 数字特征
        - 均值与方差
        - 矩

均值 $\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$

均方 $D_X^2 = E\left\{|X|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p(x)dx$

方差 $\sigma_X^2 = E\left\{|X-\mu_X|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu_X|^2 p(x)dx$

1. 随机信号及其特征描述

- 随机变量
  - 用随机变量来描述随机事件：
    - 连续型随机变量、离散型随机变量
    - 描述随机变量一般用
      - 分布函数
      - 概率密度
      - 数字特征
        - 均值与方差
        - 矩

斜度(Skewness) $Skew = E\left\{\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right]^3\right\}$

峰度(kurtosis) $kurtosis = E\left\{\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right]^4\right\}-3$

均值为一阶统计量，均方和方差为二阶统计量，可定义更高阶统计量

随机变量X的m阶原点矩

$$\eta_X^m = E\left\{|X|^m\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}|x|^m p(x)dx,\quad \eta_X^0 = 1, \eta_X^1 = \mu_X, \eta_X^2 = D_X^2$$

随机变量X的m阶中心矩

$$\gamma_X^m = E\left\{|X-\mu_X|^m\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu_X|^m p(x)dx,\quad \gamma_X^0 = 1, \gamma_X^1 = 0, \gamma_X^2 = \sigma_X^2$$

1. 随机信号及其特征描述

随机矢量（随机向量）

N个随机变量组成的向量 $\mathbf{X}=[X_1,X_2,\cdots,X_N]^T$

每个维度的随机变量都有均值，故随机矢量的均值也为矢量

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}=[\mu_{X_1},\mu_{X_2},\cdots,\mu_{X_N}]^T$$

随机矢量的方差 $\boldsymbol{\Sigma}=E\left\{(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^*(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T\right\}$是一个N×N的矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \mathrm{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_N) \\ \mathrm{cov}(X_2,X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \mathrm{cov}(X_2,X_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_N,X_1) & \mathrm{cov}(X_N,X_2) & \cdots & \sigma_{X_N}^2 \end{bmatrix}$$

其中$\mathrm{cov}(X_i,X_j)=\Sigma_{i,j}=E\left\{(X_i-\mu_{X_i})^*(X_j-\mu_{X_j})\right\}$是$X_i$和$X_j$之间的协方差

回顾联合pdf和边缘pdf，随机变量之间相互独立、互不相关

Audio Speech & Language Processing Group @ Northwestern Polytechnical University

1. 随机信号及其特征描述

- 随机信号
  - 考虑如果要研究一个电路热噪声的规律
    - 第一次观测得到噪声信号 $x_1(t)$
    - 第二次观测得到噪声信号 $x_2(t)$
    - ……
    - 第N次观测得到噪声信号 $x_N(t)$
  - 每一次观测得到的信号都不相同，怎么分析？

在某一时刻t_1，$x_1(t_1), x_2(t_1), \cdots, x_N(t_1)$可以看成是一个随机变量$X(t_1)$的观测样本
相当于在t_1时刻同时进行N次测量，同样的在任意时刻都有一个该时刻的随机变量
这些不同时刻随机变量共同组成了随机信号或随机过程，记为$X(t)$
说明随机信号是依赖于时间的随机变量，即每一时刻都是一个随机变量

这些随机变量之间有什么关系？整体特征如何描述？

1. 随机信号及其特征描述

- 随机信号
  - 考虑如果要研究一个电路热噪声的规律
  - 每一次观测得到的信号都不相同，怎么分析？

在某一时刻t_1，$x_1(t_1), x_2(t_1), \cdots, x_N(t_1)$可以看成是一个随机变量$X(t_1)$的观测样本
相当于在t_1时刻同时进行N次测量，同样的在任意时刻都有一个该时刻的随机变量
这些不同时刻随机变量共同组成了随机信号或随机过程，记为$X(t)$
说明随机信号是依赖于时间的随机变量，即每一时刻都是一个随机变量

在时间轴上取m个时刻，$t_1, t_2, \cdots, t_m$，可以得到m个随机变量$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_m)$
显然，描述这m个随机变量的理想方法是m维联合概率分布函数

$$P_X(x_1, x_2, \cdots, x_m \;;\; t_1, t_2, \cdots, t_m) = P\left(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_m) \le x_m\right)$$

当m趋于无穷时，上式完善的描述了随机信号$X(t)$，但实际无法做到

1. 随机信号及其特征描述

- 随机过程的数字特征
  - 均值

设$X(t)$是一个随机过程，对于任意固定的t_1, $X(t_1)$是一个随机变量，称
$\mu_X(t_1)=E\{X(t_1)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x_1 p_X(x_1,t_1)dx_1$为随机过程的均值。$E\{X(t)\}$是随机过程$X(t)$的所有样本在时刻$t$的平均，反映了随机过程$X(t)$在时刻$t$的摆动中心

  - 均方值：二阶原点矩 $D_X^2(t)=E\left\{\left|X(t)\right|^2\right\}$
  - 方差：二阶中心矩 $\sigma_X^2(t)=E\left\{\left|X(t)-\mu_X(t)\right|^2\right\}$
  - 自相关函数(二阶混合原点矩) $r_{XX}(t_1,t_2)=E\left\{X^*(t_1)X(t_2)\right\}$
  - 自协方差函数

$$\mathrm{cov}_{XX}(t_1,t_2)=E\left\{\left(X(t_1)-\mu_X(t_1)\right)^*\left(X(t_2)-\mu_X(t_2)\right)\right\}$$

离散随机信号－对随机信号*X*(*t*)离散化，得到*X*(*nTs*)（简记为*X*(*n*)）

对$X(n)$的每一次具体的观测结果序列记为$x(n,i)$或$x_i(n)$,则

a)若n固定，则$x(n,i)$为n时刻的随机变量

b)若i固定，则$x(n,i)$为一次观测实例，为一维离散时间序列

c)若n和i都固定，则$x(n,i)$为一个具体数值

d)若n和i都是变量，则$x(n,i)$是一个随机信号或随机过程

都需要无数次样本实现，i=1,2,…

显然，X(n)的均值，方差，均方都是时间n的函数

均值$\mu_X(n)=E\{X(n)\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i)$，取任意时刻的概率相同

方差$\sigma_X^2(n)=E\left\{\left|X(n)-\mu_X(n)\right|^2\right\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x(n,i)-\mu_X(n)\right|^2$,

均方$D_X^2(n)=E\left\{\left|X(n)\right|^2\right\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x(n,i)\right|^2$,

集总平均

自相关函数 $r_{XX}(n_1,n_2)=E\left\{X^*(n_1)X(n_2)\right\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x^*(n_1,i)x(n_2,i)$

自协方差函数 $\operatorname{cov}_{XX}(n_1,n_2)=E\left\{\left(X(n_1)-\mu_X(n_1)\right)^*\left(X(n_2)-\mu_X(n_2)\right)\right\}$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x(n_1,i)-\mu_X(n_1)\right]^*\left[x(n_2,i)-\mu_X(n_2)\right]$$

Audio Speech & Language Processing Group @ Northwestern Polytechnical University

离散随机信号中常用到的概念

由于随机信号可以看成是无数维的随机向量，因此若

$$P_X\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\ ;n_1,n_2,\cdots,n_N\right)=P_X\left(x_1;n_1\right)P_X\left(x_2;n_2\right)\cdots P_X\left(x_N;n_N\right)$$

则称$X(n)$是独立的随机信号，如果在$n_1,n_2,\cdots,n_N$时刻随机变量的分布相同，则称为独立同分布(independent and identically distributed, IID)随机信号

扩展到两个随机信号$X(n)$和$Y(n)$之间

如果两者联合概率密度和各自概率密度满足

$$p_{XY}\left(x,y\ ;n_1,n_2\right)=p_X\left(x;n_1\right)p_Y\left(y;n_2\right),\ \forall n_1,n_2$$

则两者是统计独立的，若$p_X(x;n_1)$和$p_Y(y;n_2)$是相同函数，则两者是IID的随机信号

如果$\text{cov}_{XY}\left(n_1,n_2\right)=0,\forall n_1,n_2$，则两者不相关

如果$r_{XY}\left(n_1,n_2\right)=0,\forall n_1,n_2$，则两者相互正交

相互独立一定彼此不相关，反之不成立

- 随机变量
  - 均值：标量
  - 方差（中心矩）：标量
    - 如果是两个随机变量之间，则变成协方差，决定了两者是否相关（统计独立与联合概率密度有关）
  - 均方值（原点矩）：标量
    - 如果是两个随机变量之间，则变成内积，决定两者是否正交*

注意：红色下划线为常见概念

- 随机矢量
  - 均值：矢量
  - 方差（中心矩）：方阵
    - 因为涉及到各个维之间，每一维都是随机变量，故变成协方差矩阵，如果各个维彼此不相关，则变成对角阵
  - 均方值（原点矩）：方阵
    - 因为涉及到各个维之间，每一维都是随机变量，故变成内积矩阵，如果各个维彼此正交，则变成对角阵

- 随机信号（随机过程）无限长的随机矢量
  - 均值：无限长的序列(矢量)

因为无限长，所以不谈阵

  - 方差：根据选取的时刻
    - 同一时刻(任意)，变成了随机变量的方差，是时刻t的函数
    - 不同时刻(任意)
      - 自协方差：两个随机变量之间的协方差

$$\operatorname{cov}_{XX}(t_1,t_2)=E\left\{\left(X(t_1)-\mu_X(t_1)\right)^*\left(X(t_2)-\mu_X(t_2)\right)\right\}$$

  - 均方值：根据选取的时刻
    - 同一时刻(任意)，变成了随机变量的均方值，是时刻t的函数
    - 不同时刻(任意)
      - 自相关：两个随机变量之间，与正交有关

$$r_{XX}(t_1,t_2)=E\left\{X^*(t_1)X(t_2)\right\}$$

  - 推广到两个随机信号之间
    - 同一时刻(任意)，两个随机变量之间的关系
    - 任意时刻
      - 互协方差(相关？)

$$\operatorname{cov}_{XY}(t_1,t_2)=E\left\{\left(X(t_1)-\mu_X(t_1)\right)^*\left(Y(t_2)-\mu_X(t_2)\right)\right\}$$

      - 互相关(正交？)

$$r_{XY}(t_1,t_2)=E\left\{X^*(t_1)Y(t_2)\right\}$$

第五部分
平稳随机信号及功率谱估计

- 1. 随机信号及其特征描述
- 2. 平稳随机信号
- 3. 平稳随机信号经过线性系统
- 4. 平稳随机信号的各态遍历性
- 5. 功率谱估计概述
- 6. 信号处理中的最小平方估计问题

2. 平稳随机信号

- 严(狭义)平稳随机信号(基本不存在)
  - 概率分布函数或概率密度函数不随时间变化

若$p_X\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\ ;n_1,n_2,\cdots,n_N\right)=p_X\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\ ;n_{1+k},n_{2+k},\cdots,n_{N+k}\right),\forall k$
则称$X(n)$是N阶平稳的，如果上式对$N=1,2,\cdots,\infty$都成立，则为严平稳

- 宽(广义)平稳随机信号(应用中多采用)

如果$X(n)$的均值为常数，方差有限且为常数，自相关函数$r_X(n_1,n_2)$与n_1和n_2无关，仅与n_2-n_1有关，则为宽平稳，即

$$\mu_X(n)=E\left\{X(n)\right\}=\mu_X,\sigma_X^2(n)=E\left\{\left|X(n)-\mu_X(n)\right|^2\right\}=\sigma_X^2$$

$$r_X(n_1,n_2)=E\left\{X^*(n)X(n+m)\right\}=r_X(m),m=n_2-n_1$$

在实际工作中，我们常常把所要研究的信号视为宽平稳的，以使问题简化

例 随机相位正弦序列$X(n)=A\sin(2\pi fnT_s+\Phi)$，其中$A, f$为常数，$\Phi$为随机变量，在0 ~ 2π内均匀分布，即$p(\varphi)=1/2\pi,(0\le\varphi\le 2\pi)$,求$X(n)$的均值以及自相关函数，并判断其平稳性

解 :由定义，$X(n)$的均值以及自相关函数分别为

$$\mu_X(n)=E\left\{A\sin(2\pi fnT_s+\Phi)\right\}=\int_0^{2\pi}A\sin(2\pi fnT_s+\varphi)p(\varphi)d\varphi=0$$

$$r_X(n_1,n_2)=E\left\{X^*(n_1)X(n_2)\right\}=E\left\{A^2\sin(2\pi fn_1T_s+\Phi)\sin(2\pi fn_2T_s+\Phi)\right\}$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}A\sin(2\pi fn_1T_s+\varphi)A\sin(2\pi fn_2T_s+\varphi)d\varphi=\frac{A^2}{2}\cos\left[2\pi f\left(n_2-n_1\right)T_s\right]$$

因为$\mu_X(n)$为常数，且$r_X(n_1,n_2)$仅与n_2-n_1有关，所以$X(n)$是宽平稳过程

2. 平稳随机信号

平稳随机信号的功率谱

- 能量信号

帕塞瓦尔等式为$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega,$

左边为总能量，右边$|X(j\Omega)|^2$为Ω的函数，称为$x(t)$的能谱密度

- 功率信号

帕塞瓦尔等式为$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X(j\Omega,T)|^2 d\Omega,$

其中$X(j\Omega,T) = \int_{-T}^{T} x(t)e^{-j\Omega t}dt$，令$S_X(j\Omega) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X(j\Omega,T)|^2$

左边为平均功率，右边$S_X(j\Omega)$为Ω的函数，称为$x(t)$的功率谱密度

- 平稳过程

随机信号时间无限长，样本无限多，能量无限，因为随机性，故功率谱密度

需取数学期望$S_X(j\Omega) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{|X(j\Omega,T)|^2\right\}$

集总平均

2. 平稳随机信号

- 平稳随机信号的功率谱
  - 能量信号
  - 功率信号
  - 平稳过程

维纳—辛钦(Wiener-Khintchine)定理

在自相关函数$r_X(\tau)$绝对可积的条件下，功率谱密度$S_X(j\Omega)$和$r_X(\tau)$是一傅里叶变换对，即

$$S_X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau,\quad r_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\Omega)e^{j\Omega\tau}d\Omega$$

对于离散序列，为

$$S_X(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_X(m)e^{-j\omega m},\quad r_X(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega$$

对随机信号，不再简单分析频谱，而是功率谱

2. 平稳随机信号

- 常用的功率谱
  - 平的谱，即白噪声谱

一个平稳随机过程$u(n)$，如果其功率谱$S_u(e^{j\omega})$在$|\omega| \le \pi$的范围内为一常数，如σ^2，则称该过程为白噪声，其自相关函数

$$r_u(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega = \sigma^2\delta(m)$$

是在$m=0$处的δ函数，即白噪声不同时刻都不相关，$E\{u(n+i)u(n+j)\} = 0, \forall i, j$

最随机，包含了所有频率的信号，理想模型，来源于牛顿的白光

  - 线谱，由一个或多个正弦信号组成的功率谱
  - 介于上两者之间，有峰和谷的谱，称为“ARMA”谱

第五部分
平稳随机信号及功率谱估计

- 1. 随机信号及其特征描述
- 2. 平稳随机信号
- 3. 平稳随机信号经过线性系统
- 4. 平稳随机信号的各态遍历性
- 5. 功率谱估计概述
- 6. 信号处理中的最小平方估计问题

3. 平稳随机信号经过线性系统

- 根据线性系统输入输出的卷积关系，当输入为平稳随机信号时，输出也为平稳随机信号
  - 对平稳随机信号，不能简单考察频谱，需要讨论输入输出的功率谱之间的关系
  - 输入X(n)和Y(n)之间的四个主要关系(仅讨论实信号)

输入输出自相关函数：$r_Y(m) = r_X(m) * h(m) * h(-m)$

输入输出功率谱密度：$S_Y(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega})\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$

输入输出互相关函数：$r_{XY}(m) = r_X(m) * h(m)$

输入输出互功率谱密度：$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega})H\left(e^{j\omega}\right)$

3. 平稳随机信号经过线性系统

- 考虑1：如何测量一个未知参数的线性系统的频率响应
  - 对系统输入一个功率为1的白噪声序列$u(n)$，记其输出为$y(n)$，计算其输入输出的互相关

$$r_{uy}(m) = E\{u(n)y(n+m)\} = r_u(m) * h(m)$$

因为$r_u(m)$是一个δ函数,所以$r_{uy}(m) = h(m), P_{uy}\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right)$

- 考虑2：系统辨识
  - 设一个LSI系统的输入输出分别是平稳随机信号$X(n)$和$Y(n)$，$X(n)$是功率为1的白噪声

$$P_Y\left(e^{j\omega}\right) = P_X\left(e^{j\omega}\right)\cdot\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

问题是，若已知系统输出$Y(n)$的功率谱$P_Y\left(e^{j\omega}\right)$,能否由其唯一确定系统转移函数$H(z)$呢？无相位信息！假定系统为最小/大相位

第五部分
平稳随机信号及功率谱估计

- 1. 随机信号及其特征描述
- 2. 平稳随机信号
- 3. 平稳随机信号经过线性系统
- 4. 平稳随机信号的各态遍历性
- 5. 功率谱估计概述
- 6. 信号处理中的最小平方估计问题

4. 平稳随机信号的各态遍历性

- 问题：随机过程的数字特征都需要无穷多个样本，集总平均
  - 能否用一次实验观测来代替一族记录计算数字特征？
    - 平稳随机信号的均值和方差与时间无关！自相关函数与时间点无关！
    - 如果假设一个平稳随机信号所有观测实例在某一个时刻的一阶和二阶统计特性和单一观测实例在长时间内的统计特性一致(单一观测实例变成了确定的功率信号)，则

$$\mu_X = E\{X(n)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n) = \mu_x$$

$$r_X(m) = E\{X(n)X(n+m)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i)x(n+m,i) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n)x(n+m) = r_x(m)$$

4. 平稳随机信号的各态遍历性

- 各态遍历信号
  - 一个平稳随机信号所有观测实例在某一个时刻的一阶和二阶统计特性和单一观测实例在长时间内的统计特性一致(单一观测实例变成了确定的功率信号)

$$\mu_X = E\{X(n)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n) = \mu_x$$

$$r_X(m) = E\{X(n)X(n+m)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i)x(n+m,i) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n)x(n+m) = r_x(m)$$

自相关函数变成了确定性功率信号的自相关函数，因此各态遍历随机信号的功率谱等价与确定性功率信号的功率谱，因此可以根据一次观测实例就算自相关函数，然后傅里叶变换得到功率谱

问题是无限长，如何计算自相关？

4. 平稳随机信号的各态遍历性

- 各态遍历信号
  - 一个平稳随机信号所有观测实例在某一个时刻的一阶和二阶统计特性和单一观测实例在长时间内的统计特性一致(单一观测实例变成了确定的功率信号)

$$\mu_X = E\{X(n)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n) = \mu_x$$

$$r_X(m) = E\{X(n)X(n+m)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i)x(n+m,i) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n)x(n+m) = r_x(m)$$

在实际处理信号时，对已获得的一个物理信号，往往首先假定它是平稳的，再假定它是各态遍历的

4. 平稳随机信号的各态遍历性

- 功率谱问题
  - 功率谱可以根据维纳-辛钦定理，从自相关函数的傅立叶变换定义
  - 对于各态遍历平稳信号，由于自相关函数可以用时间平均来定义，其功率谱也可以用时间平均来定义

自相关函数:

$$r_X(m) = E\{X(n)X(n+m)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i)x(n+m,i) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n)x(n+m) = r_x(m)$$

功率谱：

$$P_X(m) = P_x(m) = \lim_{M\to\infty}E\left\{\frac{1}{2M+1}\left|\sum_{n=-M}^{M}x(n)e^{-j\omega n}\right|^2\right\} = \lim_{M\to\infty}E\left\{\frac{\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{2M+1}\right\}$$

单一实例$x(n)$在[-M,M]时的DTFT

与所有实例有关 —>与所有时刻有关，即时间平均

4. 平稳随机信号的各态遍历性

- 功率谱问题(可以证明两种定义等价)

自相关函数:

$$r_X(m)=E\{X(n)X(n+m)\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n,i)x(n+m,i)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(n)x(n+m)=r_x(m)$$

功率谱：

$$P_X(m)=P_x(m)=\lim_{M\to\infty}E\left\{\frac{1}{2M+1}\left|\sum_{n=-M}^{M}x(n)e^{-j\omega n}\right|^2\right\}=\lim_{M\to\infty}E\left\{\frac{\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{2M+1}\right\}$$

对一个实例求幅度模平方得到的并不是真实的功率谱

从这两个定义可以看出功率谱计算的困难

第五部分
平稳随机信号及功率谱估计

- 1. 随机信号及其特征描述
- 2. 平稳随机信号
- 3. 平稳随机信号经过线性系统
- 4. 平稳随机信号的各态遍历性
- 5. 功率谱估计概述
- 6. 信号处理中的最小平方估计问题

5. 功率谱估计概述

- 各态遍历平稳随机信号功率谱

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_X(m)e^{-j\omega m}, \text{(维纳一辛钦定理)}$$

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} E\left\{\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} x(n)e^{j\omega n}\right|^2\right\}, \text{(功率谱定义)}$$

实际如何计算？

涉及信号与系统、随机信号分析、概率统计、随机过程、矩阵代数等基础学科，广泛应用于雷达、声纳、通信、地质勘探、天文、生物医学工程等众多领域，具有强大生命力的领域

5. 功率谱估计概述

- 谱估计的历程
  - 牛顿给出了“谱”的概念，傅里叶提出了傅里叶谐波分析
  - 19世纪末，Schuster提出用傅里叶系数的幅平方作为x(t)中功率的测量，并命名为周期图(periodogram),经典方法，现在采用FFT
  - 有限长数据的窗函数理论，边瓣，模糊；周期图方差大
  - 1927Yule提出了线性回归，回归周期，他和Walker提出Yule-Walker方程，开拓了自回归模型的先锋，奠定了参数模型法的基础
  - 1930著名控制论专家Wiener出版了他的经典著作《Generalized Harmonic Analysis》精确定义了随机过程的自相关函数和功率谱，维纳-辛钦定理，离散谐波到连续密度，把谱分析与随机过程的二阶统计量联系起来
  - 1949Tukey根据维纳-辛钦定理提出有限长数据谱估计的自相关法，Blackman和Tukey1958专著讨论了自相关谱估计法
  - 周期图和自相关法是两个最经典的方法，分辨率低，方差大
  - Wiener成为现代理论分析的先驱，Tukey成为现代实验谱分析的先驱

5. 功率谱估计概述

- 谱估计的历程
  - Yule的自回归方程启发了1938辛钦等人的线性预测理论，Bartlett1948首次建立了自回归模型系数计算功率谱。
  - 自回归模型和线性预测都用到了Toeplitz矩阵结构，Levinson1947提出Yule-Walker方程快速算法
  - 1965Cooley和Tukey的FFT算法问世，促进现代谱估计
  - 1967Burg提出最大熵谱估计，开启了高分辨率谱估计
  - 大量方法涌现，快、稳、好；高阶矩；非平稳……

第五部分
平稳随机信号及功率谱估计

- 1. 随机信号及其特征描述
- 2. 平稳随机信号
- 3. 平稳随机信号经过线性系统
- 4. 平稳随机信号的各态遍历性
- 5. 功率谱估计概述
- 6. 信号处理中的最小平方估计问题

6. 信号处理中的最小平方估计问题

- 随机信号处理常称为统计处理
  - 随机信号的数字特征或信号本身的重建或恢复都需要通过“估计”的手段实现
  - 必然涉及估值理论
  - 参数和信号估计的一个重要方法是最小平方估计或最小均方估计
    - 确定性信号处理中的最小平方问题
    - 随机信号参数的最小均方估计
    - 随机信号的线性最小均方滤波
    - 估计质量评价
      - 无偏估计
      - 一致估计

6. 信号处理中的最小平方估计问题

确定性信号处理中的最小平方估计

例子：设有信号$x_i(n)$，其中$n=0,1,\cdots,N-1$，而$i=1,2,\cdots,m$，现在用这m个信号的线性组合来近似信号$y(n)$，即

$$\tilde{y}(n)=a_1x_1(n)+a_2x_2(n)+\cdots+a_mx_m(n)$$

要寻找最佳权重向量$\mathbf{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_m]^H$，使得$\tilde{y}(n)$对$y(n)$近似的平方误差和

$$E=\sum_{n=0}^{N-1}\left|y(n)-\tilde{y}(n)\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}\left|e(n)\right|^2$$

最小。式中变量和信号都假定为复数。

阵列信号增强、盲源分离等

实际是一个二次型函数的极值问题

解法：

$$E=\mathbf{e}^H\mathbf{e}=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\mathbf{a})^H(\mathbf{y}-\mathbf{X}\mathbf{a}),\quad 令\frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}}=0$$

可以推出$\hat{\mathbf{a}}=(\mathbf{X}^H\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^H\mathbf{y}$，而相应的$E_{\min}=\mathbf{y}^H\mathbf{y}-\mathbf{y}^H\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}$

6. 信号处理中的最小平方估计问题

随机信号参数的最小均方估计

例子:给定了一个随机信号$x(n)$的n个值,$x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$,希望用这$N$个值来估计$x(n)$的一个参数$\theta$,此处设$\theta$是随机变量，假定$\theta$可以用下面的线性方程来估计

$$\hat{\theta} = -\sum_{n=0}^{N-1} \beta_n^* x(n) = -\boldsymbol{\beta}^H \mathbf{X}$$

式中$\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{N-1}]^T$，$\mathbf{X} = \left[x(0), x(1), \cdots, x(N-1)\right]^T$,寻找最优系数向量，使参数估计的均方误差最小，即

$$mse[\hat{\theta}] = E\left\{\left|\theta - \hat{\theta}\right|^2\right\} = E\left\{\left(\theta + \boldsymbol{\beta}^H \mathbf{X}\right)\left(\theta + \boldsymbol{\beta}^H \mathbf{X}\right)^H\right\}$$

在滤波和预测等领域大量运用

可以推导出著名的维纳霍普夫方程以及最小均方误差估计的正交原理

解法：

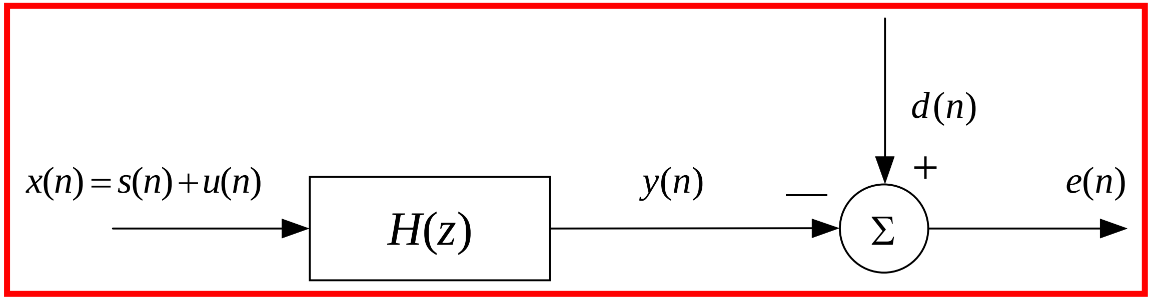
令$mse[\hat{\theta}]$相对于$\boldsymbol{\beta}$最小，可以得到使均方误差最小的系数向量以及最小均方误差

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{r}_{\theta x}, \quad mse_{\min} = \sigma_\theta^2 + \mathbf{r}_{\theta x}^H \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

其中$\sigma_\theta^2 = E\left\{|\theta|^2\right\}, \mathbf{r}_{\theta x} = E\left\{\theta^* \mathbf{X}\right\}, \mathbf{C}_x$是$\mathbf{X}$的协方差矩阵

6. 信号处理中的最小平方估计问题

随机信号的线性最小均方滤波



$x(n)$:观测得到的信号，$s(n)$:真实信号，$u(n)$:噪声，$d(n)$:期望的输出信号

(1)如果$d(n)=s(n)$,变成滤波问题

(2)如果$d(n)=s(n+\Delta),\Delta>0$，变成纯预测问题

(3)如果$d(n)=x(n+\Delta),\Delta>0$，变成预测(prediction)问题

目标：使$y(n)$最接近所希望的$d(n)$，衡量接近程度的最通用方法是均方误差准则

即令$\varepsilon=E\left\{e^2(n)\right\}=E\left\{\left[d(n)-y(n)\right]^2\right\}$最小

如果是滤波问题，可以推导出维纳霍普夫方程，得到维纳滤波器

如果是预测问题，可以推导出线性预测理论

6. 信号处理中的最小平方估计问题

- 估计质量评价
  - 估计的偏差

$$bia\left[\hat{\theta}\right]=E\left\{\hat{\theta}-\theta\right\}=E\left\{\hat{\theta}\right\}-\theta$$

  - 无偏估计 $bia\left[\hat{\theta}\right]=0$
    - 渐进无偏估计

$$\lim_{N\to\infty} bia\left[\hat{\theta}\right]=0$$

  - 估计的均方误差

$$mse[\hat{\theta}]=E\left\{\left|\theta-\hat{\theta}\right|^2\right\}=\mathrm{var}\left[\hat{\theta}\right]+\left(bia\left[\hat{\theta}\right]\right)^2$$

  - 一致估计

$mse[\hat{\theta}]=0$,即要求估计的方差和偏差都趋近于零

This is an end, but not the end!

Thanks