数字信号处理
Digital Signal Processing

付中华
mailfzh@nwpu.edu.cn
http://www.nwpu-aslp.org/gary/

第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

1. 滤波器的基本概念

- 滤波器设计
  - 给定目标滤波器参数，设计出符合要求的滤波器(冲激响应、传递函数等)，属于离散时间系统的综合
- 滤波器的概念
  - 可根据功能、实现方法、设计方法进行不同的分类
  - 两大类
    - 经典滤波器：有用成分和待滤除成分占据不同频带
    - 现代滤波器：信号和噪声的频谱相互重叠——关键在于从含噪信号中估计信号的某些特征或信号本身，进而提高信噪比。基于随机信号处理理论，用统计特征(自相关函数、功率谱、高阶谱等)导出最佳估值算法。如：维纳滤波器、卡尔曼滤波器、线性预测器、自适应滤波器等

需要丰富扎实的线性代数、概率统计、随机过程、自动控制、模式识别等知识才能学好现代信号处理

1. 滤波器的基本概念

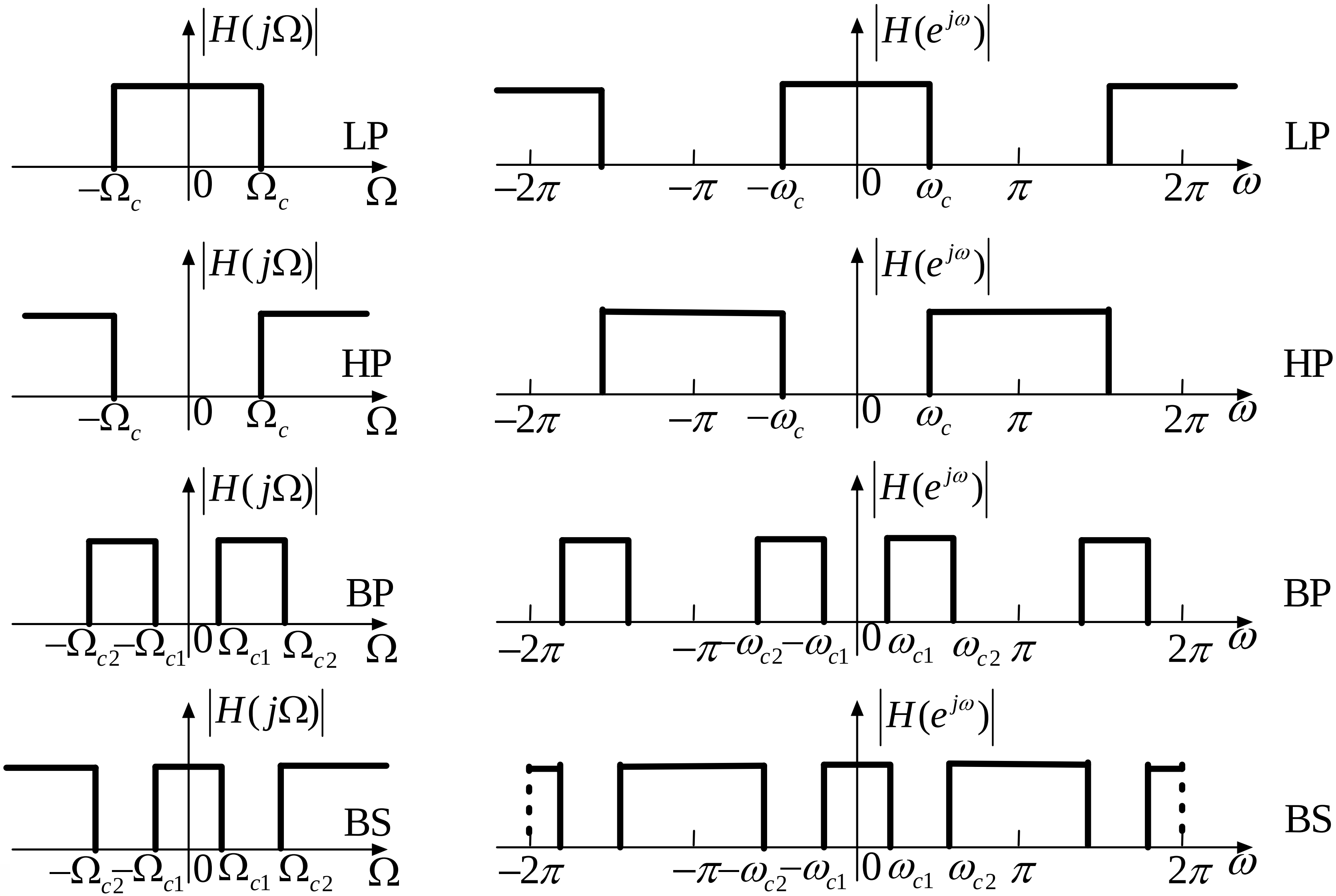
- 经典滤波器(从功能上分)
  - (LP,HP,BP,BS)×(AF,DF)
  - DF从实现方法上，又分IIR滤器和FIR滤波器

IIR DF的转移函数 $H(z)=\dfrac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$ 或 $\dfrac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}},(a_0=1)$

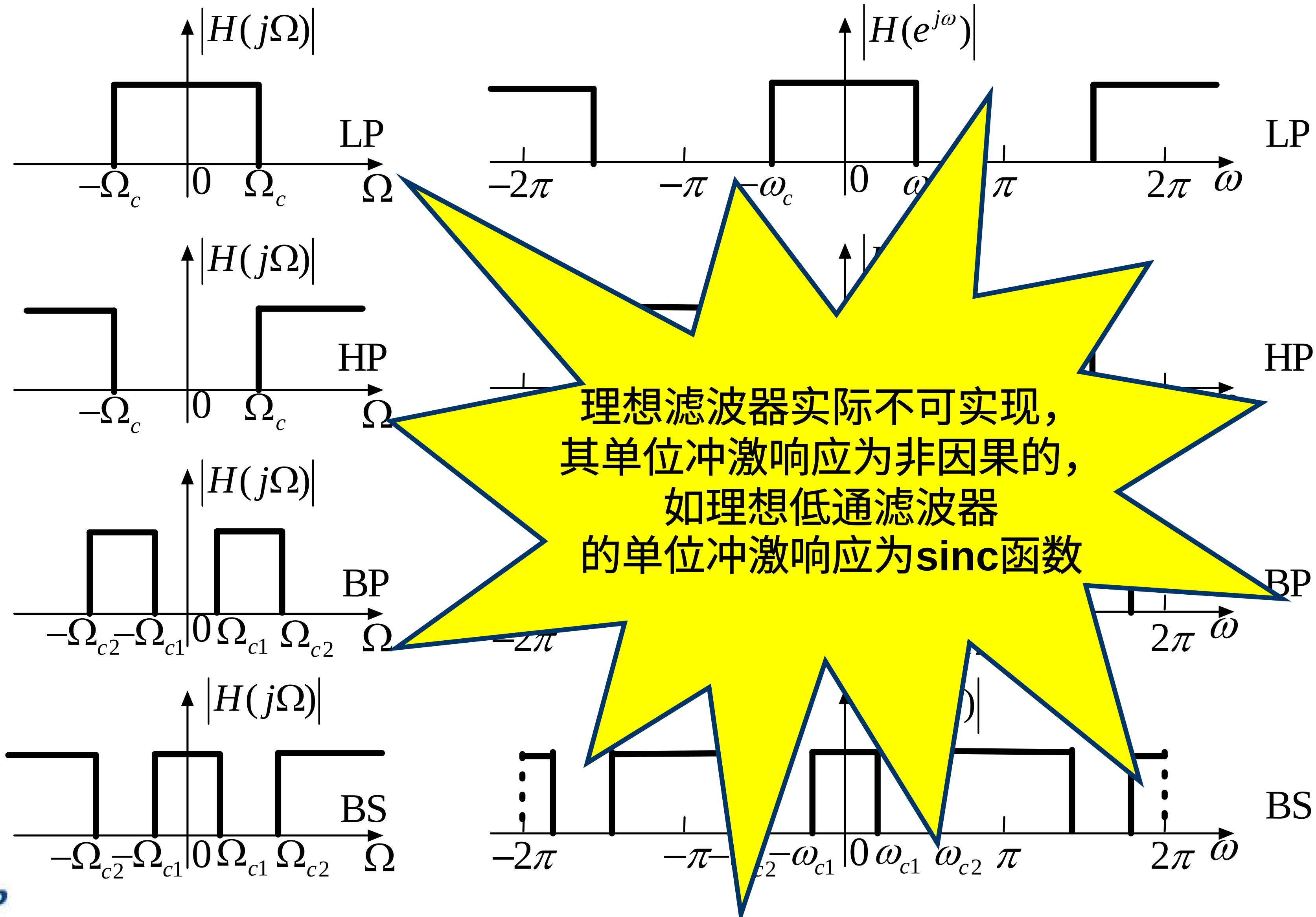
FIR DF的转移函数 $H(z)=\sum_{r=0}^{M} h(n) z^{-r}$

注意FIR的转移函数系数实质上就是单位冲激响应；IIF的转移函数可以看成是两个FIR转移函数的商，想想已知IIF的H(z)分子分母系数，如何求其频率响应？

1. 滤波器的基本概念——理想AF和DF



1. 滤波器的基本概念——理想AF和DF



1. 滤波器的基本概念

- 滤波器的技术要求
  - 理想滤波器频响有突变，导致物理不可实现
  - 在突变附近设置一个过渡带，在通带和子带内允许有一定的波动误差
  - 常用技术指标
    - 通带允许的最大衰减(通带波纹)

$$a_p = 20\lg\frac{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\omega_p}\right)\right|} = 20\lg\frac{1}{\left|H\left(e^{j\omega_p}\right)\right|} = -20\lg\left|H\left(e^{j\omega_p}\right)\right|$$

    - 阻带应达到最小衰减(阻带衰减)

$$a_s = 20\lg\frac{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\omega_s}\right)\right|} = 20\lg\frac{1}{\left|H\left(e^{j\omega_s}\right)\right|} = -20\lg\left|H\left(e^{j\omega_s}\right)\right|$$

ω_0为通带最大增益对应频率通常认为ω_0处信号无损通过

1. 滤波器的基本概念

- 滤波器的技术要求
  - 理想滤波器频响有突变，导致物理不可实现
  - 在突变附近设置一个过渡带，在通带和子带内允许有一定的波动误差
  - 常用技术指标
    - 通带允许的最大衰减(通带波纹)

$$a_p = 20\lg\frac{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\omega_p}\right)\right|} = 20\lg\frac{1}{\left|H\left(e^{j\omega_p}\right)\right|} = -20\lg\left|H\left(e^{j\omega_p}\right)\right|$$

    - 阻带应达到最小衰减(阻带衰减)

$$a_s = 20\lg\frac{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\omega_s}\right)\right|} = 20\lg\frac{1}{\left|H\left(e^{j\omega_s}\right)\right|} = -20\lg\left|H\left(e^{j\omega_s}\right)\right|$$

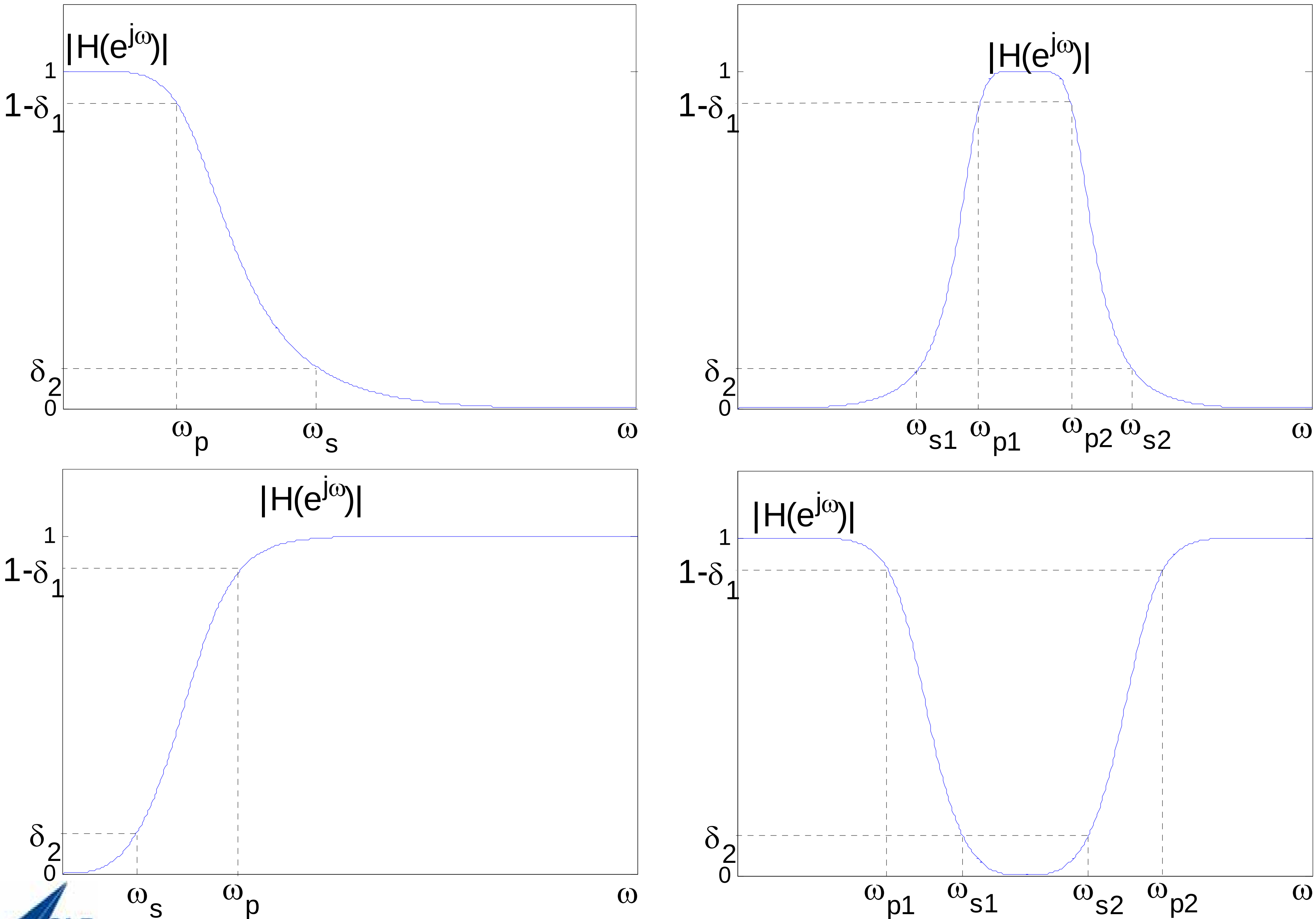
如$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$在$\omega_p$处下降为0.707

则$\boxed{a_p = 3dB}$，在ω_s处下降为0.01

则$a_s = 40dB$

1. 滤波器的基本概念

- 滤波器的技术要求
  - 理想滤波器频响有突变，导致物理不可实现
  - 在突变附近设置一个过渡带，在通带和子带内允许有一定的波动误差
  - 常用技术指标
    - 通带允许的最大衰减
    - 阻带应达到最小衰减(阻带衰减)
  - 其他
    - 滚降：用来反映过渡带的陡峭程度，例如滚降为15dB/oct表示每倍频程衰减15dB，还有用每十倍频程衰减量来描述



|H(e^jω)|
1
1-δ1
δ2
0
ωp
ωs
ω
|H(e^jω)|
1
1-δ1
δ2
0
ωs1
ωp1
ωp2
ωs2
ω
|H(e^jω)|
1
1-δ1
δ2
0
ωs
ωp
ω
|H(e^jω)|
1
1-δ1
δ2
0
ωp1
ωs1
ωs2
ωp2
ω

1. 滤波器的基本设计步骤

- 不论是IIR还是FIR数字滤波器
  - 给出所需要滤波器的技术指标
  - 设计一个$H(z)$使其逼近所需要的技术指标
  - 实现所设计的$H(z)$
- IIR数字滤波器(借助成熟的AF设计方法)
  - 将DF指标转换成AF指标
  - 设计模拟低通滤波器原型$G(s)$
  - 将$G(s)$转换成$H(z)$
  - *如果不是低通，还需要将其他类型滤波器指标转换成低通指标，最后再将低通原型$G(s)$转换成所需的$H(z)$

第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

2. 模拟低通滤波器设计

- 设计问题

给定AF技术指标$a_p,\Omega_p,a_s,\Omega_s$,其中$a_p$为通带最大衰减，$\Omega_p$为通带截止频率，$a_s$为阻带最小衰减，$\Omega_s$为阻带起始频率，设计低通AF

$$G(s)=\frac{d_0+d_1s+\cdots+d_{N-1}s^{N-1}+d_Ns^N}{c_0+c_1s+\cdots+c_{N-1}s^{N-1}+c_Ns^N}$$

使其对数幅频响应$10\lg|G(s)|^2$在Ω_p，Ω_s处分别达到a_p,a_s的要求

当$s=j\Omega$（s平面的虚轴）时，$G(s)\big|_{s=j\Omega}=G(j\Omega)=\dfrac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$

故$|G(j\Omega)|$可以看成是关于Ω的增益函数，相应的定义一个衰减函数

$$\alpha(j\Omega)=10\lg\frac{1}{|G(j\Omega)|^2}=-10\lg|G(j\Omega)|^2,\ 即|G(j\Omega)|^2=10^{-\alpha(j\Omega)/10}$$

2. 模拟低通滤波器设计

- 设计问题

当$s=j\Omega$（s平面的虚轴）时，$G(s)\big|_{s=j\Omega}=G(j\Omega)=\dfrac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$

故$|G(j\Omega)|$可以看成是关于Ω的增益函数，相应的定义一个衰减函数

$$\alpha(j\Omega)=10\lg\frac{1}{|G(j\Omega)|^2}=-10\lg|G(j\Omega)|^2，即|G(j\Omega)|^2=10^{-\alpha(j\Omega)/10}$$

根据通带最大衰减a_p和阻带最小衰减a_s的定义，有

$$a_p=10\lg\frac{1}{|G(j\Omega_p)|^2}=\alpha(j\Omega_p)=-10\lg|G(j\Omega_p)|^2,$$

$$a_s=10\lg\frac{1}{|G(j\Omega_s)|^2}=\alpha(j\Omega_s)=-10\lg|G(j\Omega_s)|^2,$$

因此滤波器设计的关键是寻找符合$a_p,\Omega_p,a_s,\Omega_s$的幅平方函数$|G(j\Omega)|^2$问题

因为实际设计的滤波器的冲激响应都是实数，故根据$|G(j\Omega)|^2$，可以得到

$$G(s)G^*(s)=G(s)G(-s)\big|_{s=j\Omega}=|G(j\Omega)|^2$$

2. 模拟低通滤波器设计

思考滤波器阶数
或阶次的含义

已有的模拟低通滤波器原型

- 巴特沃思(Butterworth)滤波器

$$\left|G(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+C^2\left(\Omega^2\right)^N},\quad C\text{为待定常数，}N\text{为待定的滤波器阶次}$$

- 切比雪夫I型(Chebyshev- I)滤波器

$$\left|G(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\Omega\right)},\quad C_n^2\left(\Omega\right)=\cos^2\left(n\arccos\Omega\right)$$

- 切比雪夫II型(Chebyshev- II)滤波器

$$\left|G(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left[C_n^2\left(\Omega_s\right)/C_n^2\left(\Omega_s/\Omega\right)\right]^2}$$

- 椭圆滤波器

$$\left|G(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 U_n^2\left(\Omega\right)},\quad \text{其中}U_n^2\left(\Omega\right)\text{是雅可比}(\text{Jacobian})\text{椭圆函数}$$

2. 模拟低通滤波器设计

低通滤波器原型参数

因为每个滤波器设计参数千差万别，设计原型滤波器需要归一化处理

设所需要的实际频率为Ω(或 f)，归一化后的频率为λ，对低通AF

$$\boxed{\lambda = \Omega/\Omega_p = f/f_p}$$

$$\boxed{\text{显然}\lambda_p = 1,\ \lambda_s = \Omega_s/\Omega_p}$$

复数变量 s 进行归一化为p，因$s = j\Omega$，，故

$$\boxed{p = j\lambda}$$

$$\boxed{\text{显然}\boxed{p} = j\lambda = j\Omega/\Omega_p = \boxed{s/\Omega_p}}$$

记住下面的过程

$$G(s) \Rightarrow G(j\Omega) \Rightarrow G(j\lambda) \Rightarrow G(p)$$

第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

巴特沃思模拟低通滤波器设计

- 巴特沃思低通原型 $|G(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+C^2(\Omega^2)^N}$

(1)将实际频率Ω归一化

归一化幅平方特性 $|G(j\lambda)|^2 = \dfrac{1}{1+C^2\lambda^{2N}}$，目标是确定$C$和$N$

(2)求C和N

$\alpha(j\Omega) = -10\lg|G(j\Omega)|^2 \Rightarrow \alpha(j\lambda) = -10\lg|G(j\lambda)|^2$

λ取λ_p(λ_p=1)和λ_s时，衰减分别为a_p和a_s dB，于是两个未知数，两个方程可解，得

$$\boxed{\begin{aligned} C^2 &= 10^{a_p/10} - 1 \\ N &= \lg\sqrt{\frac{10^{a_s/10}-1}{10^{a_p/10}-1}} \Big/ \lg\lambda \end{aligned}}$$

若令$a_p = 3dB$,则$C = 1$

常用形式 $|G(j\lambda)|^2 = \dfrac{1}{1+\lambda^{2N}}$

巴特沃思模拟低通滤波器设计

(1)将实际频率Ω归一化

(2)求C和N

$$C^2 = 10^{a_p/10} - 1$$

$$N = \lg\sqrt{\frac{10^{a_s/10}-1}{10^{a_p/10}-1}} \Big/ \lg\lambda_s$$

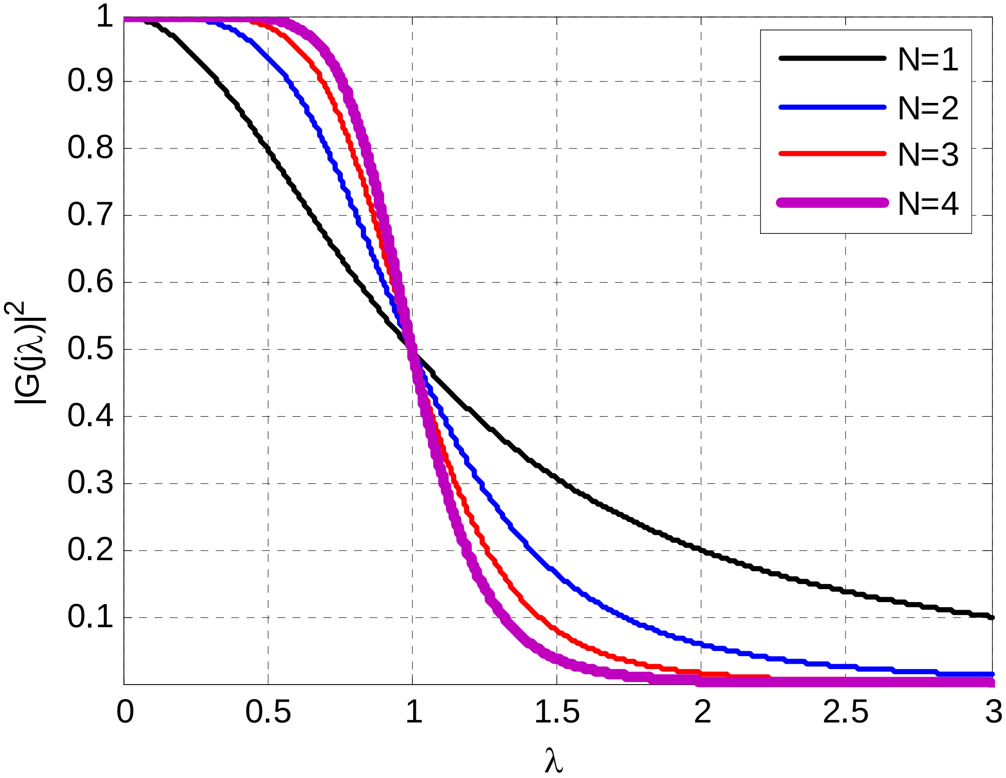
(3)确定$G(s)$

$$\left|G(j\lambda)\right|^2 = \frac{1}{1+C^2\lambda^{2N}}$$

因为$p = j\lambda$,所以

$$G(p)G(-p) = \frac{1}{1+\lambda^{2N}} = \frac{1}{1+(p/j)^{2N}} = \frac{1}{1+(-1)^N p^{2N}}$$

$a_p = 3dB$



(这里考虑$a_p = 3dB$，即$C = 1$的典型情况，其他情况可以相应推出)

巴特沃思模拟低通滤波器设计

(3)确定$G(s)$

$$G(p)G(-p)=\frac{1}{1+\lambda^{2N}}=\frac{1}{1+(p/j)^{2N}}=\frac{1}{1+(-1)^N p^{2N}}$$

令分母为0，可以求出2N个极点$p_k=\exp\left(j\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right),k=1,2,\cdots,2N$

为了保证滤波器的稳定性，必须把s域左半平面的极点赋予$G(p)$

即$\frac{\pi}{2}\le\frac{2k+N-1}{2N}\pi\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow k=1,2,\cdots,N$

因此 $G(p)=\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_N)}$

$$1+(-1)^N p^{2N}=0$$

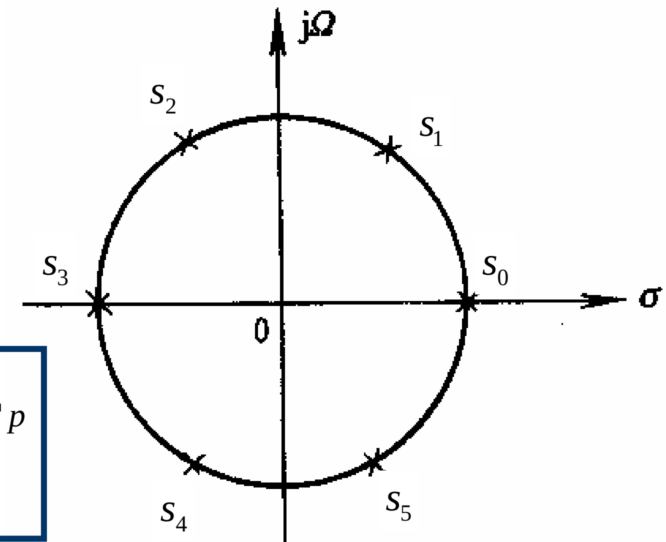
$$p^{2N}=(-1)^{1-N}=(-1)^{N-1}$$

$$=\exp\left[j\left((N-1)\pi+2k\pi\right)\right]$$

$$p_k=\exp\left(j\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right)$$

因为$p=j\lambda=j\Omega/\Omega_p=s/\Omega_p$

所以可求出$G(s)$



N=3时极点分布

巴特沃思模拟低通滤波器设计

例：设计模拟低通巴特沃思滤波器，截止频率$f_p = 5000Hz$,通带最大衰减$a_p = 3dB$

阻带起始频率$f_s = 10000Hz$,阻带最小衰减$a_s = 30dB$

解 :求归一化频率$\Omega_p = 2\pi f_p, \lambda_p = 1, \lambda_s = 10000/5000 = 2$

因为$a_p = 3dB$,所以$C = 1$,

$$N = \lg\sqrt{\frac{10^{a_s/10}-1}{10^{a_p/10}-1}} \Big/ \lg\lambda_s = 4.982 \approx 5$$

$$p_k = \exp\left(j\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) = p_k = \exp\left(j\frac{k+2}{5}\pi\right), k = 1, 2, \cdots, 5$$

可求出$G(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+0.618p+1)(p^2+1.618p+1)}$

故$G(s) = G(p)\big|_{p=s/\Omega_p} = \dfrac{10^{20}\pi^5}{(s+10^4\pi)(s^2+0.618\pi\times10^4 s+10^8\pi^2)(s^2+1.618\pi\times10^4 s+10^8\pi^2)}$

巴特沃思模拟低通滤波器设计

巴特沃斯归一化低通滤波器参数

极点位置 / 阶数 N	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-2}$	$P_{2,N-3}$	$P_{3,N-4}$	P_4
1	−1.0000				
2	−0.7071±j0.7071				
3	−0.5000±j0.8660	−1.0000			
4	−0.3827±j0.9239	−0.9239±j0.3827			
5	−0.3090±j0.9511	−0.8090±j0.5878	−1.0000		
6	−0.2588±j0.9659	−0.7071±j0.7071	−0.9659±j0.2588		
7	−0.2225±j0.9749	−0.6235±j0.7818	−0.9010±j0.4339	−1.0000	
8	0.1951±j0.9808	0.5556±j0.8315	−0.8315±j0.5556	−0.9808±j0.1951	
9	−0.1736±j0.9848	−0.5000±j0.8660	−0.7660±j0.6428	−0.9397±j0.3420	−1.0000

巴特沃思模拟低通滤波器设计

巴特沃斯归一化低通滤波器参数

分母多项式 / 系数阶数 N	$B(p)=p^N+b_{N-1}p^{N-1}+b_{N-2}p^{N-2}+\cdots+b_1p+b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588

第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

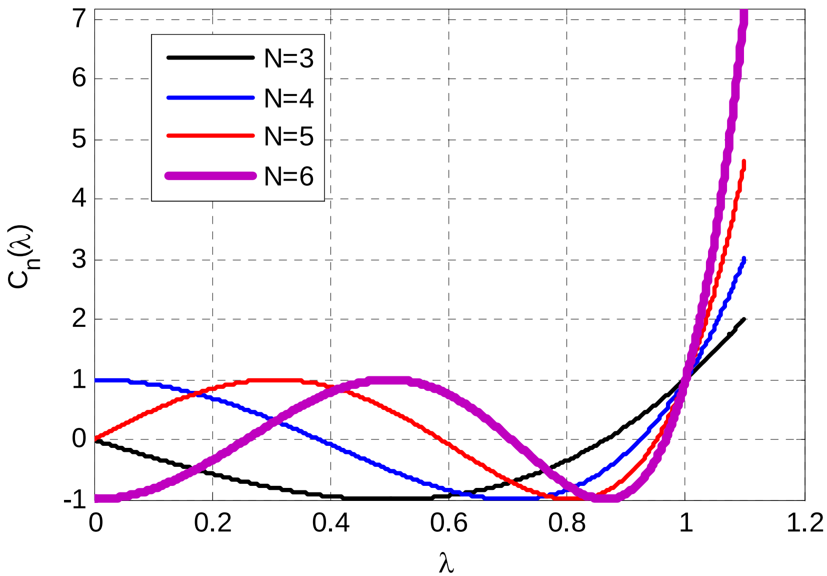
- 切比雪夫I型低通原型

$$|G(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_n^2(\Omega)},\quad C_n(\Omega)=\cos\left(n\arccos\Omega\right),|\Omega|\le 1$$

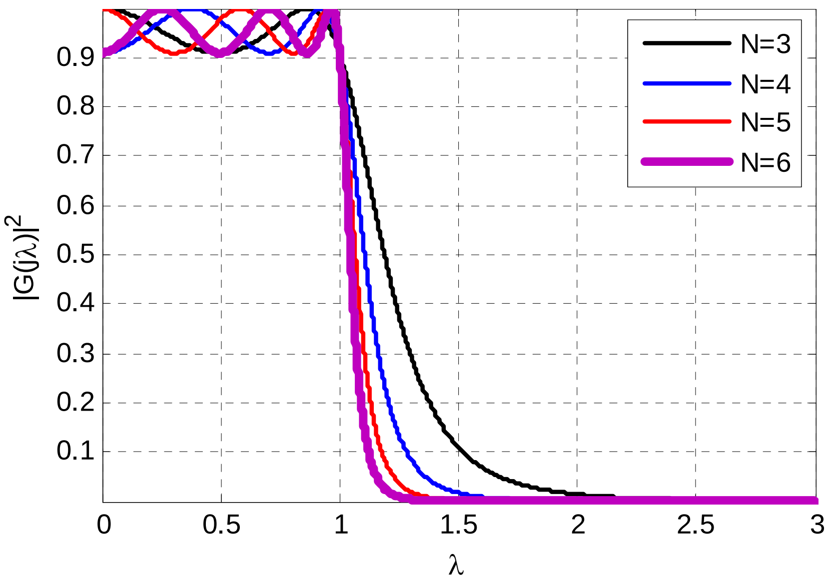
$$C_n(\Omega)=\cosh\left(n\,\mathrm{ar}\cosh\Omega\right),|\Omega|>1$$

双曲余弦

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$



切比雪夫多项式



切比雪夫滤波器

切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

切比雪夫I型低通原型

$$|G(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_n^2(\Omega)},\quad C_n(\Omega)=\cos\left(n\arccos\Omega\right),|\Omega|\le 1$$

$$C_n(\Omega)=\cosh\left(n\,\mathrm{ar}\cosh\Omega\right),|\Omega|>1$$

切比雪夫多项式$C_n(\Omega)$的特点：

$$C_{n+1}(\Omega)=2C_n(\Omega)\Omega-C_{n-1}(\Omega);\quad C_n(\Omega)=2C_{n-1}(\Omega)\Omega-C_{n-2}(\Omega)$$

令$n=0,1,\cdots,4$，有

$$C_0(\Omega)=\cos 0=1$$

$$C_1(\Omega)=\cos(\arccos\Omega)=\Omega$$

$$C_2(\Omega)=2C_1(\Omega)\Omega-C_0(\Omega)=2\Omega^2-1$$

$$C_3(\Omega)=2C_2(\Omega)\Omega-C_1(\Omega)=4\Omega^3-3\Omega$$

$$C_4(\Omega)=2C_3(\Omega)\Omega-C_2(\Omega)=8\Omega^4-8\Omega^2+1$$

$$\vdots$$

切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

切比雪夫I型低通原型

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}, \quad C_n(\Omega) = \cos(n\arccos\Omega), |\Omega| \le 1$$

$$C_n(\Omega) = \cosh(n\,\mathrm{ar}\cosh\Omega), |\Omega| > 1$$

切比雪夫多项式$C_n(\Omega)$的特点：

$$C_{n+1}(\Omega) = 2C_n(\Omega)\Omega - C_{n-1}(\Omega); \quad C_n(\Omega) = 2C_{n-1}(\Omega)\Omega - C_{n-2}(\Omega)$$

令$n = 0,1,\cdots,4$,有

$$C_0(\Omega) = \cos 0 = 1$$

$$C_1(\Omega) = \cos(\arccos\Omega) = \Omega$$

$$C_2(\Omega) = 2C_1(\Omega)\Omega - C_0(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$

$$C_3(\Omega) = 2C_2(\Omega)\Omega - C_1(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

$$C_4(\Omega) = 2C_3(\Omega)\Omega - C_2(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$$

$$\vdots$$

注意最高次幂之前的系数规律！！

切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

- 切比雪夫I型低通原型

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}$$

(1)将实际频率Ω归一化

归一化幅平方特性$|G(j\lambda)|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2}$，目标是确定$\varepsilon$和$N$

(2)求ε和N

与巴特沃思滤波器类似，由于$C_n^2(1)=1$，可得

$$\varepsilon^2 = 10^{a_p/10} - 1;$$

$$n = \frac{\operatorname{arcosh} a}{\operatorname{arcosh} \lambda_s}, \text{其中} a^2 = \frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \lg\left[x + (x^2 - 1)^{1/2}\right]$$

(3)确定$G(s)$　因为$p = j\lambda$,所以

$$G(p)G(-p) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(p/j)}$$

求$1+\varepsilon^2 C_n^2(p/j)$的根$p_k$，
然后将左半平面的根赋给$G(p)$

切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

(1)将实际频率Ω归一化

(2)求ε和N

$\boxed{(3)确定G(s)}$

因为$p = j\lambda$,所以

$$G(p)G(-p) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(p/j)}$$

求$1+\varepsilon^2 C_n^2(p/j)$的根$p_k$,
然后将左半平面的根赋给$G(p)$

如果令$p_k = \sigma_k + j\lambda_k$,可以证明

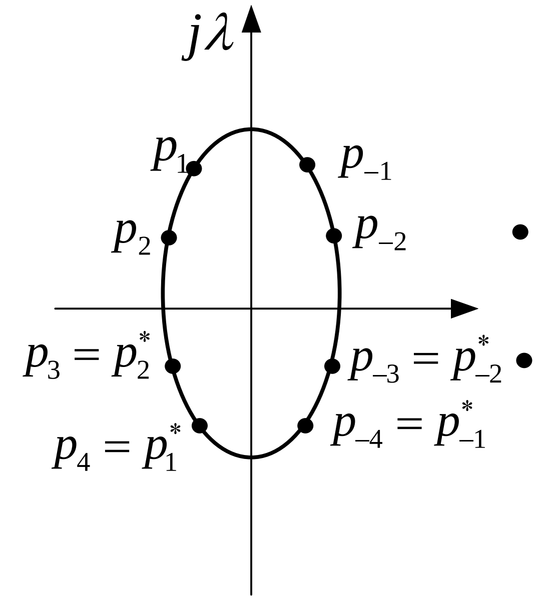
$$\left(\frac{\sigma_k}{\sinh\varphi_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_k}{\cosh\varphi_2}\right)^2 = 1, 其中\ \varphi_2 = \frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

说明极点实部和虚部满足椭圆方程，即

p_k落在椭圆上

$$p_k = -\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\varphi_2 + j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\varphi_2$$

$k = 1, 2, \cdots, n$



n=4

观察系数

$$\boxed{G(p) = \frac{1}{\varepsilon \times 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(p-p_k)}}$$

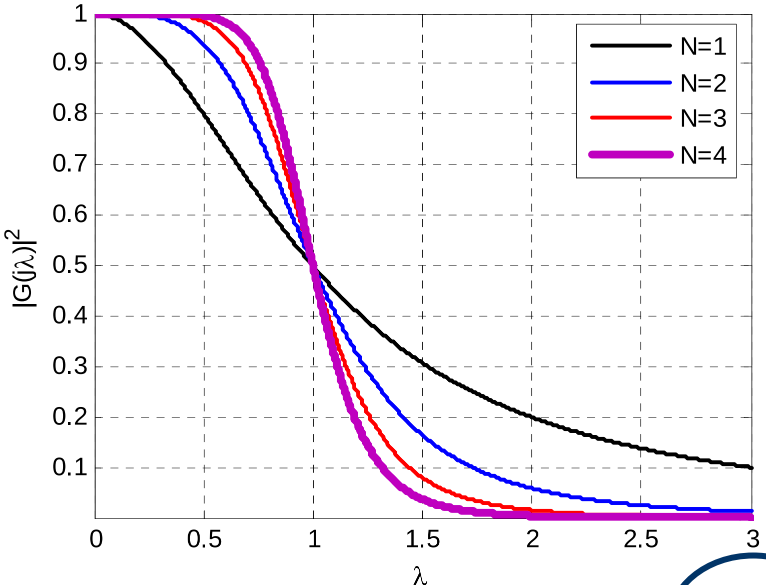
切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

(3)确定$G(s)$

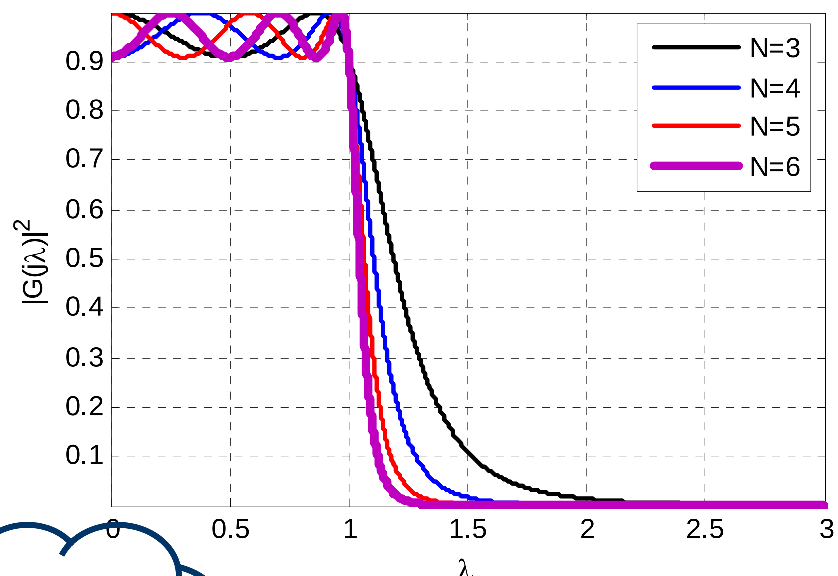
$$G(p)=\frac{1}{\varepsilon\times 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(p-p_k)}$$

实际的转移函数为

$$G(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{\Omega_p^n}{\varepsilon\times 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(s-p_k\Omega_p\right)}$$



巴特沃思滤波器



切比雪夫滤波器

比较通、阻带特性（单调、波纹）、过渡带

切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

例：设计模拟低通切比雪夫I型滤波器，通带最高频率$f_p=3MHz$,通带衰减小于0.1dB

阻带起始频率$f_s=12MHz$,阻带衰减大于60dB

解 :求归一化频率$\Omega_p=2\pi f_p,\lambda_p=1,\lambda_s=12/3=4$

求滤波器阶数n和常数ε，$\varepsilon^2=10^{a_p/10}-1\Rightarrow\varepsilon=0.15262$

$$n=\frac{\operatorname{arcosh} a}{\operatorname{arcosh}\lambda_s}=4.6\approx 5,\ \left(\text{其中}a^2=\frac{10^{a_s/10}-1}{10^{a_p/10}-1}\right)$$

求极点

$$p_k=-\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\varphi_2+j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\varphi_2,k=1,2,\cdots,5.\ \text{其中}\varphi_2=\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

可求出$G(p)=\dfrac{1}{2^4\varepsilon(p+0.5389)(p^2+0.3331p+1.1949)(p^2+0.87198p+0.63592)}$

$$\text{故}G(s)=G(p)\Big|_{p=s/\Omega_p}=\frac{0.974852\times10^{36}}{(s+1.01580\times10^7)(s^2+6.27879\times10^6 s+4.2459\times10^{14})}$$

$$\times\frac{1}{(s^2+1.64368\times10^7 s+2.25946\times10^{14})}$$

切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

例：设计模拟低通切比雪夫I型滤波器，通带最高频率$f_p=3MHz$,通带衰减小于$0.1dB$

阻带起始频率$f_s=12MHz$,阻带衰减大于$60dB$

解 :求归一化频率$\Omega_p=2\pi f_p, \lambda_p=1, \lambda_s=12/3=4$

求滤波器阶数n和常数ε，$\varepsilon^2=10^{a_p/10}-1 \Rightarrow \varepsilon=0.15262$

实际如何计算？计算误差会有什么影响？

$$n=\frac{\operatorname{arcosh} a}{\operatorname{arcosh} \lambda_s}=4.6\approx 5, \left(\text{其中}a^2=\frac{10^{a_s/10}-1}{10^{a_p/10}-1}\right)$$

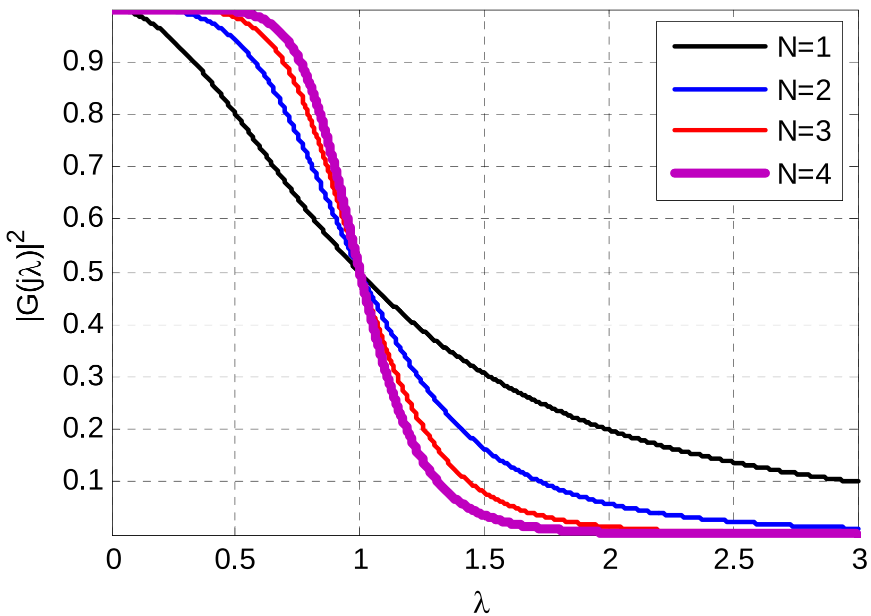
求极点

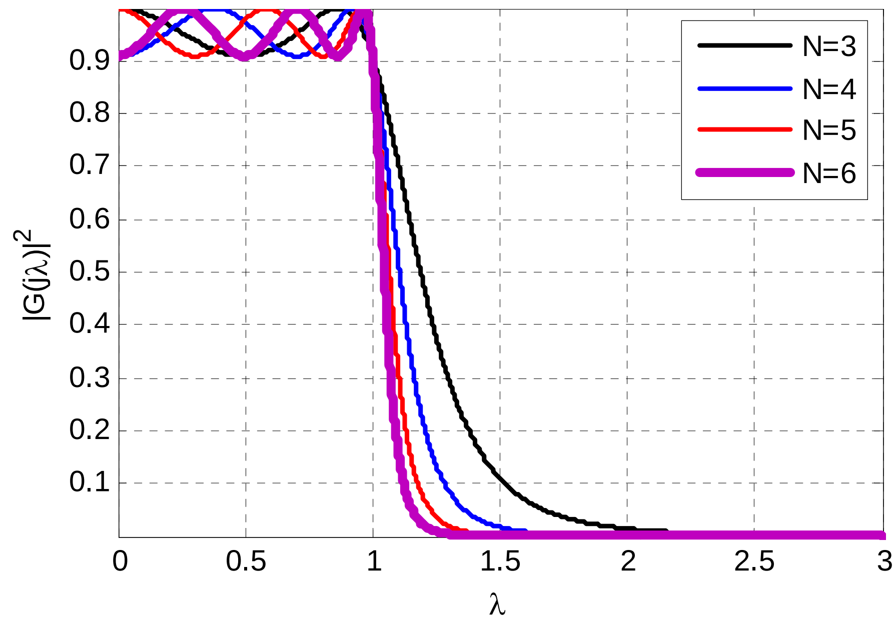
$$p_k=-\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\varphi_2+j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\varphi_2, k=1,2,\cdots,5.\ \text{其中}\varphi_2=\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

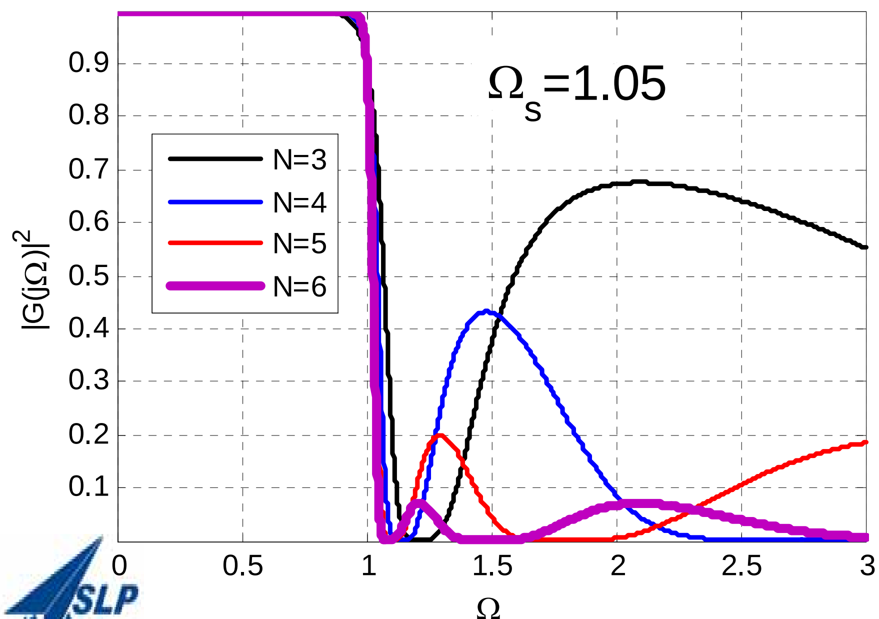
可求出$G(p)=\dfrac{1}{2^4\varepsilon(p+0.5389)(p^2+0.3331p+1.1949)(p^2+0.87198p+0.63592)}$

$$\text{故}G(s)=G(p)\Big|_{p=s/\Omega_p}=\frac{0.974852\times10^{36}}{(s+1.01580\times10^7)(s^2+6.27879\times10^6 s+4.2459\times10^{14})}$$

$$\times\frac{1}{(s^2+1.64368\times10^7 s+2.25946\times10^{14})}$$





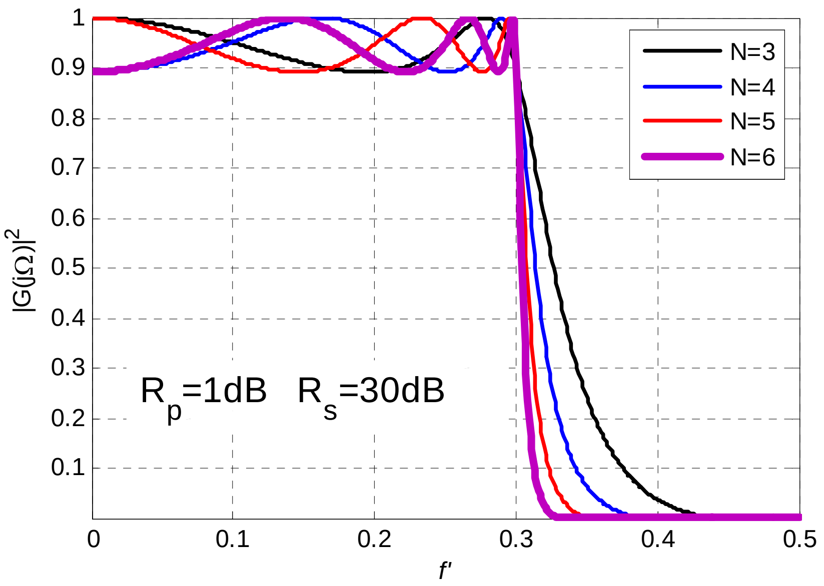


模拟低通

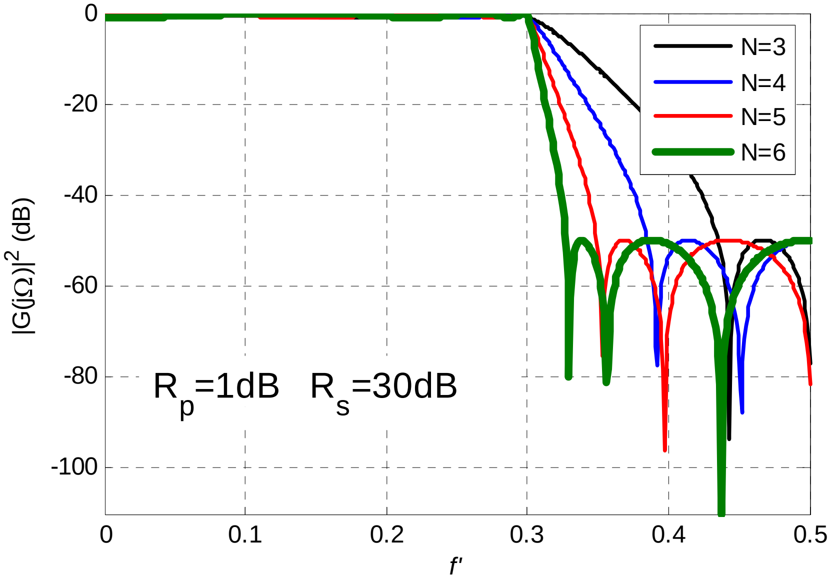
巴特沃思滤波器	切比雪夫I型滤波器
切比雪夫II型滤波器	

椭圆(考尔)滤波器

幅平方响应



幅平方响应（dB）



结论：

巴特沃思滤波器在通阻带都是单调下降；切比雪夫I型滤波器在通带内呈等波纹振荡，在阻带内单调下降；切比雪夫II型滤波器在阻带内呈等波纹振荡，在通带内单调下降；椭圆滤波器在通阻带内都可以实现等波纹振荡，且有最窄的过渡带

经典滤波器都有表格和曲线可以查询，还有大量成熟的工具辅助设计

第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器

- 模拟低通已有完整的公式及图表
- 高通、带通、带阻等模拟滤波器应尽量利用这些资源，无须再各搞一套公式和图表
  - 一般过程

给定高通、带通或带阻的技术指标 →(频率转换)→ 低通滤波器技术指标 → 设计模拟低通滤波器G(p) →(频率转换)→ 得到高通、带通或带阻滤波器H(s)

符号标记说明：

关键在于频率转换关系

即λ和η之间的转换关系

$$\lambda = f(\eta)$$

模拟低通原型滤波器：

$G(s), G(j\Omega)$，归一化频率为λ，归一化复频率$p = j\lambda$

归一化转移函数$G(p)$，归一化频率特性$G(j\lambda)$

其他模拟滤波器：

$H(s), H(j\Omega)$，归一化频率为η，归一化复频率$q = j\eta$

归一化转移函数$H(q)$，归一化频率特性$H(j\eta)$

1)模拟高通滤波器设计

- 频率变换关系 $\boxed{\lambda\eta = \pm 1\ (\text{通常取}-1)}$

于是 $q = j\eta = \dfrac{1}{j\lambda} = \dfrac{1}{p}$, η是归一化频率，故$j\eta = j\dfrac{\Omega}{\Omega_p} = \dfrac{s}{\Omega_p}$

所以求出模拟低通$G(p)$之后，模拟高通$H(s) = G(p)\Big|_{p=\Omega_p/s}$

例：设计巴特沃思高通，要求$f_p = 100Hz, a_p = 3dB, f_s = 50Hz, a_s = 30dB$

解：先将频率归一化，得$\eta_p = 1, \eta_s = 0.5$, 频率变换得$\lambda_p = 1, \lambda_s = 2$

设计模拟低通，得到$G(p)$

令$p = \Omega_p / s = 2\pi f_p / s$代入$G(p)$，即可求得转移函数$H(s)$

2)模拟带通滤波器设计

- 频率变换关系

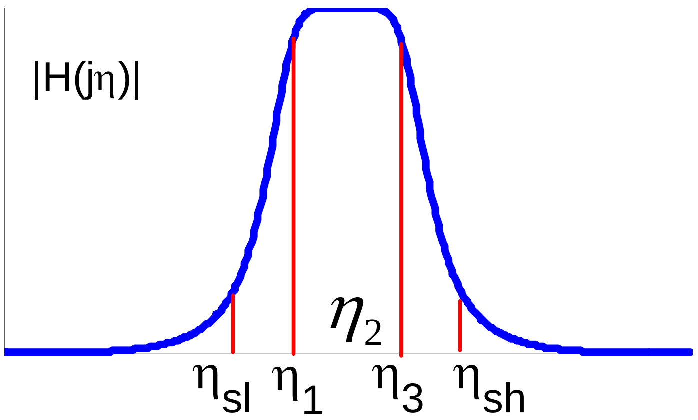
$$\eta = \frac{\Omega}{\Omega_{BW}},$$

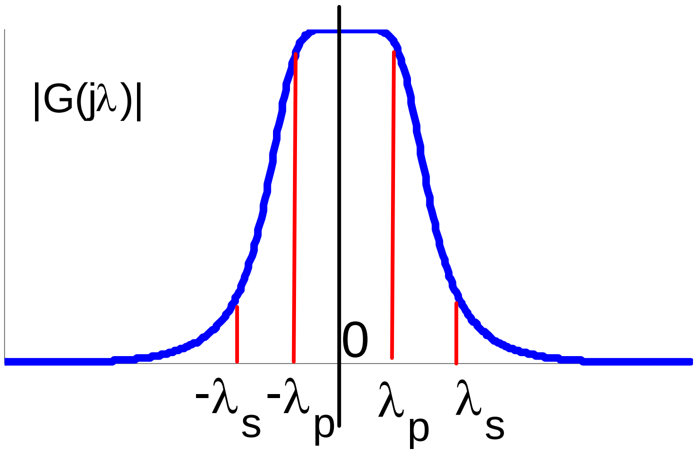
Ω_{BW}为通带宽度，$\Omega_{BW} = \Omega_3 - \Omega_1$

$$\eta_2^2 = \eta_1\eta_3$$

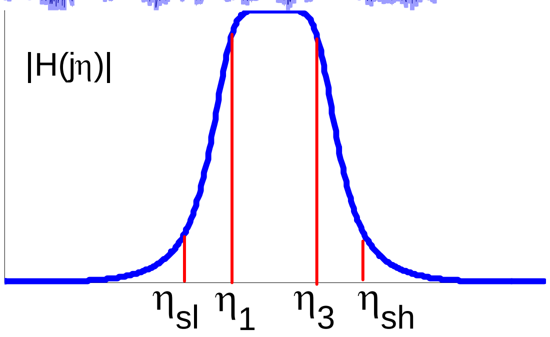
$$\boxed{\lambda = \frac{\eta^2 - \eta_2^2}{\eta}}$$

$$H(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_1\Omega_3}{s(\Omega_3-\Omega_1)}}$$





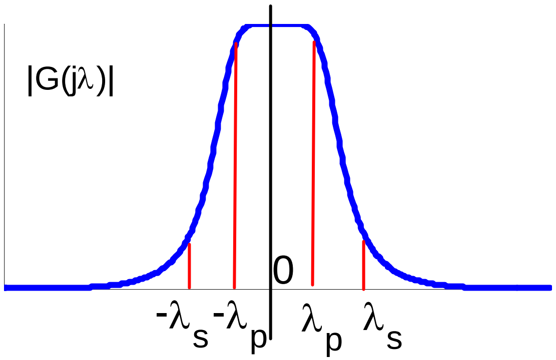
2)模拟带通滤波器设计



- 频率变换关系

$$\eta=\frac{\Omega}{\Omega_{BW}},\Omega_{BW}\text{为通带宽度,}\quad \eta_2^2=\eta_1\eta_3$$

$$\boxed{\lambda=\frac{\eta^2-\eta_2^2}{\eta}}\qquad H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_1\Omega_3}{s(\Omega_3-\Omega_1)}}$$



例：带宽200Hz,中心频率1000Hz,通带衰减小于3dB,阻带截止频率830Hz,1200Hz 阻带衰减不小于25dB

解：$\Omega_{BW}=2\pi\times200,\Omega_2=2\pi\times1000,\Omega_{sl}=2\pi\times830,\Omega_{sh}=2\pi\times1200$

归一化后$\eta_{BW}=1,\eta_2^2=25,\eta_{sl}=4.15,\eta_{sh}=6$

由$\eta_3-\eta_1=1,\eta_1\eta_3=\eta_2^2$可求得$\eta_1=4.525,\eta_3=5.525$

根据频率转换关系可以得到$\lambda_p=1,\lambda_s=1.833$

设计低通$G(p)$,将$p=\dfrac{s^2+\Omega_1\Omega_3}{s(\Omega_3-\Omega_1)}$代入得到$H(s)$

3)模拟带阻滤波器设计

- 频率转换关系（与带通类似）

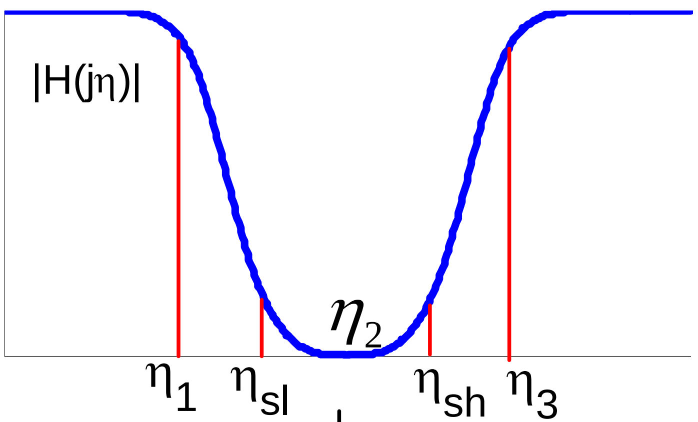
$$\eta = \frac{\Omega}{\Omega_{BW}},$$

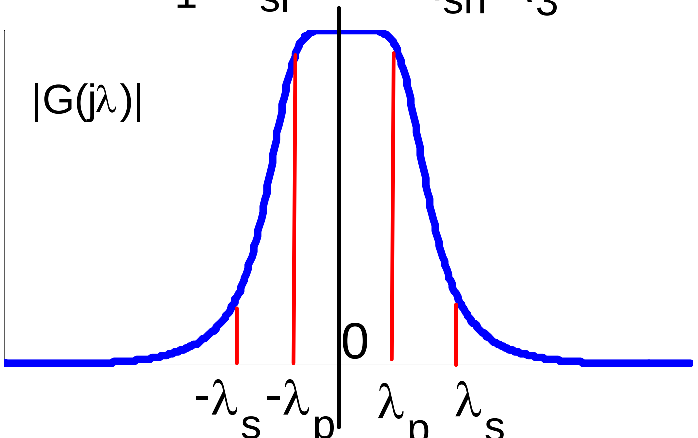
Ω_{BW}为通带宽度，$\Omega_{BW} = \Omega_3 - \Omega_1$

$$\eta_2^2 = \eta_1 \eta_3$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\eta}{\eta^2 - \eta_2^2}}$$

$$H(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{s(\Omega_3-\Omega_1)}{s^2+\Omega_1\Omega_3}}$$





第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)

- 现在我们已经能够设计模拟滤波器的设计方法
- 解决数字滤波器设计需要
  - 数字滤波器指标转化为模拟滤波器指标
  - S域和Z域的映射方法
  - 得到H(z)的分子分母必须是Z的有理式
- 冲激响应不变法的思路
  - 用时域抽样，即认为h(n)是h(t)的抽样，从而使得 $H(e^{j\omega})$逼近$H(j\Omega)$

回忆抽样对频谱产生的影响

4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)

- 模拟系统G(s)总可以分解为一阶和二阶系统的并联或级联(实系数)

一阶系统$G(s)=A/(s+a)$,则$g(t)=Ae^{-at}$,对其抽样得到$h(nT_s)=Ae^{-anT_s}$,因此

$$H(z)=A/(1-e^{-aT_s}z^{-1})$$

二阶系统$G(s)=\beta/\left((s-\alpha)^2+\beta^2\right)$,则$g(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$

$$H(z)=\frac{ze^{\alpha T_s}\sin(\beta T_s)}{z^2-z\left[2e^{\alpha T_s}\cos(\beta T_s)\right]+e^{2\alpha T_s}}$$

根据上面两个结果，可以把**G(s)**转换成**H(z)**

问题是时域抽样导致频域周期延拓，

即$H(e^{j\omega})$是$G(j\Omega)$的周期延拓，可能混叠

4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)

- 模拟系统G(s)总可以分解为一阶和二阶系统的并联或级联(实系数)

问题是时域抽样导致频域周期延拓，

即$H(e^{j\omega})$是$G(j\Omega)$的周期延拓，可能混叠

如果$G(j\Omega)$不是带限的，或抽样频率不够高，会发生混叠这是冲激响应法的严重缺点，例如高通、带阻滤波器都不是带限的，无法使用冲激响应不变法

优点是保持了模拟频率和数字频率之间的线性关系，从 Ω到 ω

第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

5. 双线性Z变换法设计IIR DLF

- 冲激响应不变法频域混叠的原因

> s域的虚轴$j\Omega$映射到z平面以2π为周期的单位圆上
> 即$j\Omega$轴上每间隔$2\pi/T_s$，便映射到单位圆一周

- 为避免混叠

> 1)s平面的$j\Omega$轴只映射为z平面的单位圆一周
> 2)若G(s)是稳定的，则相应的H(z)也是稳定的
> 3)必须是可逆映射
> 4)如果G(j0)=1,则$H(e^{j0})$也应等于1

双线性Z变换

$$s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \text{或} z=\frac{1+(T_s/2)s}{1-(T_s/2)s}$$

5. 双线性Z变换法设计IIR DLF

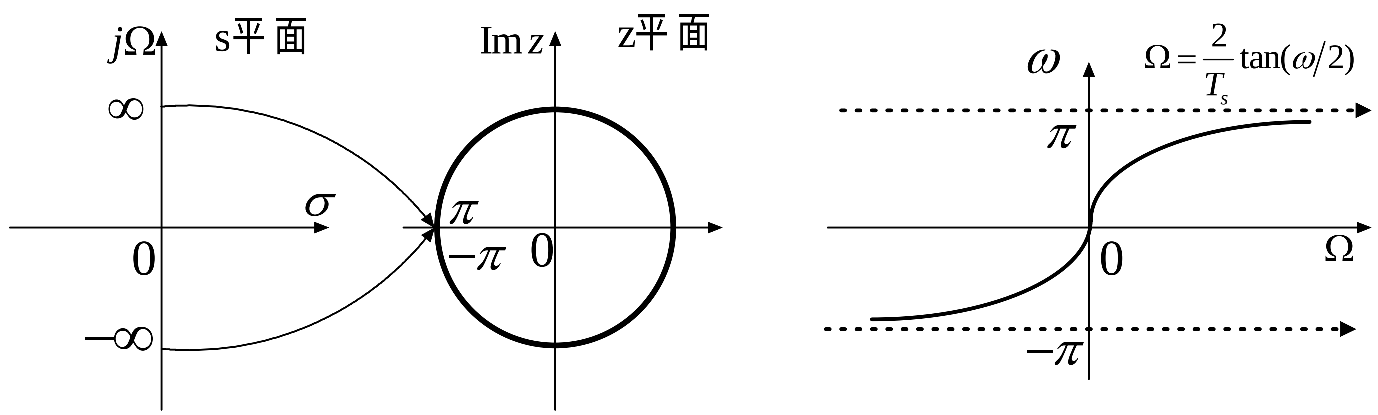
- 双线性Z变换

$$\boxed{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \text{或} z=\frac{1+(T_s/2)s}{1-(T_s/2)s}}$$

$$j\Omega=\frac{2}{T_s}\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}+1}=j\frac{2}{T_s}\tan(\omega/2),$$

$$\text{即}\Omega=\frac{2}{T_s}\tan(\omega/2)$$

$$\text{也即}\omega=2\arctan(\Omega T_s/2)$$



5. 双线性Z变换法设计IIR DLF

- 步骤

1)给定数字滤波器指标$\omega_p, \omega_s, a_p, a_s$,转换成模拟指标，有$\Omega_p = \frac{2}{T_s}\tan(\omega_p/2)$

$$\Omega_s = \frac{2}{T_s}\tan(\omega_s/2), \lambda_p = 1, \lambda_s = \Omega_s/\Omega_p = \tan(\omega_s/2)/\tan(\omega_p/2)$$

2)设计出模拟低通滤波器原型$G(p)$,进而得到相应的$G(s)$

$$G(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}},$$

3)用双线性Z变换求出H(z)

$$H(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$

5. 双线性Z变换法设计IIR DLF

- 性能分析

在双线性Z变换下Ω和ω的关系是$\Omega=\dfrac{2}{T_s}\tan(\omega/2)$，或$\tan(\omega/2)=\dfrac{\Omega T_s}{2}$

实际上Ω和ω的真实关系是$\omega=\Omega T_s$，或$\omega/2=\dfrac{\Omega T_s}{2}$

在低频附近$\omega/2$与$\tan(\omega/2)$非常接近，当$f>f_p$的高频域，出现非线性失真

因为这种失真关系是已知的，因此可以预先调整数字滤波器指标以达到抵消效果——预畸

结论：双线性Z变换消除了频域混叠现象，这是最大优点，但引入了非线性失真（可通过预畸消除）

第四部分(I)
无限冲激响应数字滤波器设计

- 1. 滤波器的基本概念
- 2. 模拟低通滤波器设计
  - 1) 巴特沃思模拟低通滤波器设计
  - 2) 切比雪夫I型模拟低通滤波器设计
- 3. 从模拟低通到其他类型模拟滤波器
- 4. 冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器(DLF)
- 5. 双线性Z变换法设计IIR DLF
- 6. 其他类型数字滤波器设计

6. 其他类型数字滤波器设计

- 前面已经讨论了
  - 模拟低通原型滤波器设计
  - 模拟滤波器设计（s域的频域变换）
  - 对模拟低通采样双线性Z变换设计数字低通
- 可以很容易得到其他类型数字滤波器设计方法
  - 数字滤波器指标－>模拟滤波器指标
  - 模拟滤波器指标－>模拟低通滤波器原型的指标
  - 设计模拟低通滤波器原型G(p)
  - 转换成模拟滤波器H(s)
  - 双线性Z变换将H(s)转换成数字滤波器H(z)

6. 其他类型数字滤波器设计

- 例如：数字高通

给出数字高通 $H_{dhp}(z)$ 的技术指标 $\omega_p, \omega_s, a_p, a_s$

$\xrightarrow{\Omega = \tan(\omega/2)}$

得到模拟高通 $H_{dhp}(s)$ 的技术要求 $\Omega_p, \Omega_s, a_p, a_s$

$\xrightarrow[\lambda = 1/\eta]{\eta = \Omega/\Omega_p,}$

得到模拟低通 $G(p)$ 的技术要求 $\lambda_p, \lambda_s, a_p, a_s$

$\longrightarrow$

设计出 $G(p)$

$\xrightarrow{p = \frac{\Omega_p}{s}}$

得到模拟高通转移函数 $H_{dhp}(s)$

$\xrightarrow{s = \frac{z-1}{z+1}}$

最后得到数字高通转移函数 $H_{dhp}(z)$

与本章有关的matlab函数

- buttord.m－确定数字\模拟滤波器阶数
  - [N,Wn]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs)
    - Wp,Ws是相对于Fs/2的归一化频率，即Fs/2对应1
    - Rp,Rs分别为通阻带衰减，单位dB
- buttap.m－设计模拟低通原型
  - [z,p,k]=buttap(N)
    - z,p,k分别为G(p)的极点、零点、增益
- lp2lp,lp2hp,lp2bp,lp2bs－模拟滤波器转换
- bilinear.m－双线性变换
- butter.m－直接设计数字巴特沃思滤波器
- cheb1ord;cheb1ap;cheby1
- cheb2ord;cheb2ap;cheby2
- ellipord;ellipap;ellip