数字信号处理
Digital Signal Processing

付中华
mailfzh@nwpu.edu.cn
http://www.nwpu-aslp.org/gary/

第三部分
离散时间信号的傅里叶变换及快速算法

- 1. 从连续信号的FT到离散信号的FT
- 2. 连续时间信号的抽样
- 3. 离散傅里叶级数
- 4. 离散傅里叶变换DFT
- 5. 频域采样理论
- 6. 与DFT有关的几个问题
- 7. 快速傅里叶变换

1.从连续信号的FT到离散信号的FT

- 傅立叶分析或谐波分析
  - 包含傅立叶级数(FS)和傅立叶变换(FT)
  - 类似于光谱分析中的三棱镜
  - 变换的基向量是一组复正弦(规则且有好的性质)
- 连续周期信号的傅立叶级数

设$x(t)$是一个满足Dirichlet条件的周期信号(在一个周期内有限间断点,有限极值数量,绝对可积),可将其展成傅立叶级数，即

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t},\text{其中 } X(k\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$e^{jk\Omega_0 t}$为一组基频为Ω_0的复正弦,各次谐波频率为$k\Omega_0$,Ω_0满足$T=2\pi/\Omega_0$,T为$x(t)$信号的周期

想想当T趋于无穷时,有什么变化

连续非周期信号的傅立叶变换

设$x(t)$是一连续时间信号,且满足: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

则其傅立叶变换存在,并定义为 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$

其反变换为 $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$,其中$\Omega = 2\pi f$为角频率

$x(t)$是t的连续函数, $X(j\Omega)$是Ω的连续函数,称为信号$x(t)$的频谱密度,简称频谱

- 傅立叶级数和傅立叶变换的区别和联系

FS的系数$X(k\Omega_0)$是离散的,对应周期信号,表示第k次谐波的幅度和相位

FT的系数$X(j\Omega)$是连续的,对应无限长绝对平方可积信号(非周期),表示密度

$$\lim_{T\to\infty} TX(k\Omega_0) = \boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{2\pi X(k\Omega_0)}{\Omega_0}} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt = X(j\Omega)$$

Parseval定理

- 对功率信号(如周期信号)—能量无限大,FS

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega_0)e^{-jk\Omega_0 t}\right]dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega_0)\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega_0)X(k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(k\Omega_0)|^2$$

$$\boxed{\text{于是}P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(k\Omega_0)|^2}$$

此式反映了**周期信号**的功率与傅里叶级数系数的关系——**功率关系**

- 对能量信号—能量有限,FT

$$\boxed{\text{同样可证明}: E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega}$$

此式反映了**能量信号**的时频能量之间的关系——**能量关系**

对周期信号直接求傅立叶变换

- 现在,不考虑FT存在的条件,直接对周期信号FT

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}\right]e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-k\Omega_0)t}dt$$

因为$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm jxy}dx=2\pi\delta(y)$

所以$X(j\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0)$

冲激序列的系数(或权重)为相应傅里叶级数的系数。记住这一点！

一个周期信号的傅立叶变换是由频率轴上一组间距为Ω_0的冲激序列(Drac函数)所组成．可以发现，在引入了冲激信号之后,本不具备FT条件的周期信号也可以进行傅里叶变换．这样可以把FS和FT统一在一个理论框架下讨论

时域连续的周期信号的傅立叶变换在频域是离散的,非周期的

常用周期信号傅里叶变换回顾

- 单个复正弦

$$x(t)=e^{j\Omega_0 t} \Leftrightarrow X(j\Omega)=2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

- 实正弦

$$x(t)=\sin\Omega_0 t=\left[e^{j\Omega_0 t}-e^{-j\Omega_0 t}\right]/2j \Leftrightarrow X(j\Omega)=j\pi\left[\delta(\Omega+\Omega_0)-\delta(\Omega-\Omega_0)\right]$$

- 实余弦

$$x(t)=\cos\Omega_0 t=\left[e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}\right]/2 \Leftrightarrow X(j\Omega)=\pi\left[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)\right]$$

- 复正弦集合

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\Omega_0 t} \Leftrightarrow X(j\Omega)=\boxed{2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)}$$

- 时域冲激串序列

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \Leftrightarrow P(j\Omega)=\boxed{\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)}$$

都是频域冲激串！！

常用周期信号傅里叶变换回顾

关于时域冲激串序列

$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$,因其是周期为$T$的周期信号，可以展成傅里叶级数

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P(k\Omega_0)e^{-jk\Omega_0 t}$$

其中傅里叶级数的系数

$$P(k\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}p(t)e^{jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

因此$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-jk\Omega_0 t},\Omega_0=2\pi/T}$

又因为$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-jk\Omega_0 t}\Leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-k\Omega_0\right)$

所以$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\Leftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-k\Omega_0\right)}$

记住几个重要的变换关系

无数谐波总和对应频域冲激串序列

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

时域冲激序列对应频域冲激串序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

无数谐波总和变成了时域冲激串

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 t}, \Omega_0 = 2\pi/T$$

按照正变换和逆变换的共轭关系，可以得到频域冲激串序列与频域谐波之间的关系

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega nT}, T = 2\pi/\Omega_0$$

其实是傅里叶级数的形式

离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)

- 定义

离散时间信号的离散角频率，圆周角频率

设$x(n)$为一绝对可积离散信号，其DTFT定义为

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

可以看出$x(n)$是离散的非周期序列，而$X\left(e^{j\omega}\right)$是$\omega$的连续周期函数$(T=2\pi)$

因为$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n}=e^{-j2\pi n}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X\left(e^{j\omega}\right)$

时域？频域？离散？连续？周期？非周期？你搞清楚了吗？它们之间有什么联系吗？

离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)

- 回顾
  - 周期信号因为不满足绝对可积条件，不存在傅里叶变换，只能展开成傅里叶级数。但当引入了冲激函数之后，如果对周期信号实施傅里叶变换，将得到冲激串序列

$$X(j\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

连续信号角频率

$X(k\Omega_0)$为傅里叶级数的系数，且$T=2\pi/\Omega_0$

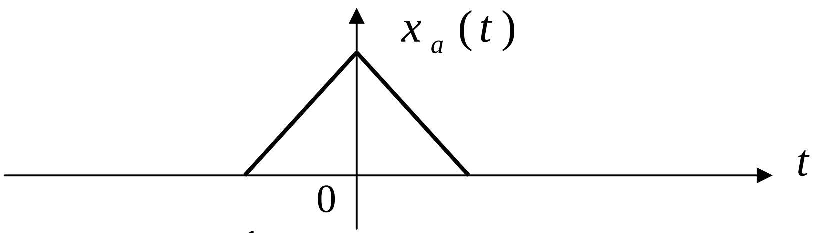
当$T\to\infty$时，$\Omega_0\to 0$，$x(t)$变成非周期信号，而频域变成连续函数

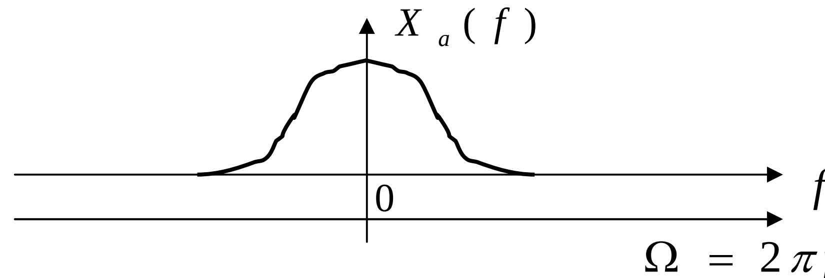
根据时域频域的共轭性，可得到频域周期性与时域离散性的关联

可见周期性导致变换域的离散性

四种形式的傅里叶变换(周期×离散)

1．连续时间与连续频率— 连续傅里叶变换（CFT）

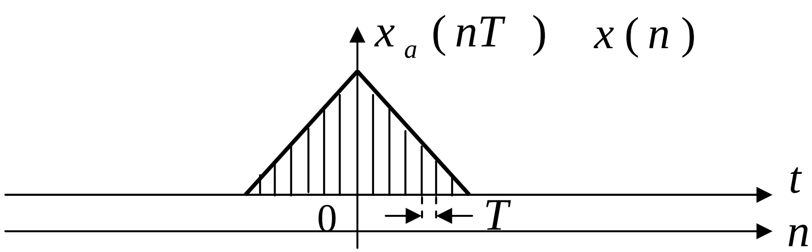


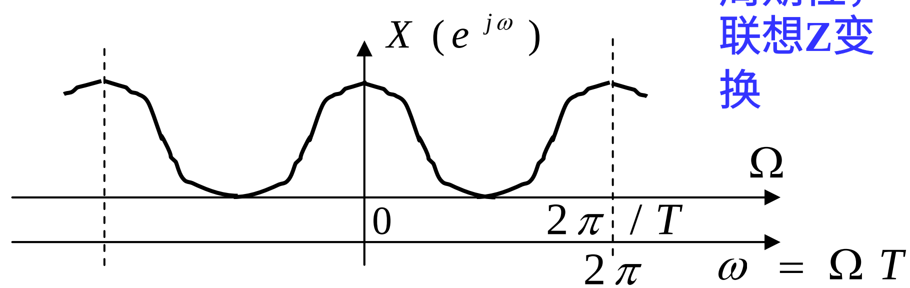


$$x_a(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

2．离散时间与连续频率— 序列傅里叶变换（DTFT）





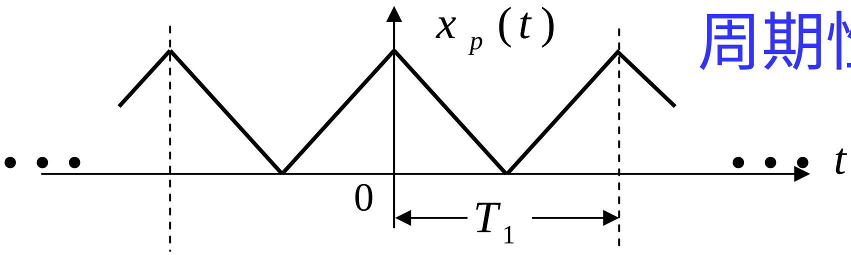
周期性，联想Z变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

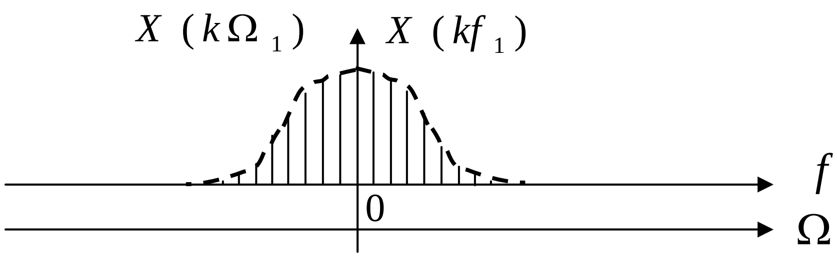
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

四种形式的傅里叶变换(周期×离散)

3．连续时间与离散频率— 傅里叶级数(FS)



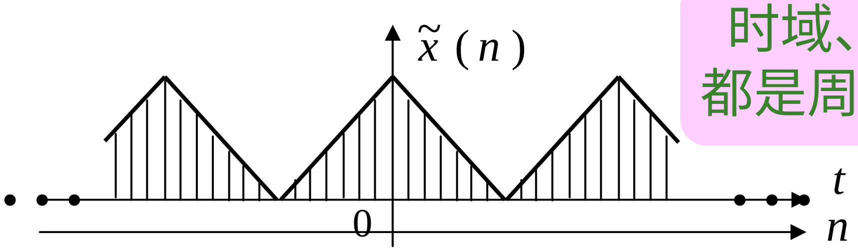
周期性



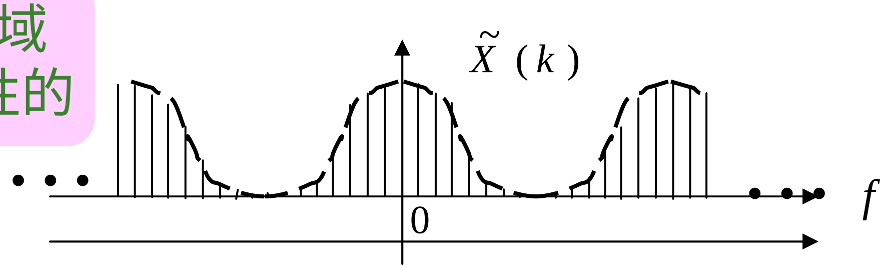
$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_p(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

4．离散时间与离散频率— 离散傅里叶级数(DFS)



时域、频域
都是周期性的



$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

DTFT的性质

- 线性

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n),$$
$$X(e^{j\omega}) = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

- 时移

$$y(n) = x(n-n_0) \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

- 时域卷积

$$y(n) = x(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- 频域卷积

$$y(n) = x(n)h(n) \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

- 时域相关

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n+m) \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Parseval(巴赛伐)定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

DTFT的性质

- 奇、偶、虚、实、对称性

$$x(n)=x_R(n)+x_I(n)$$

$$X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+X_I(e^{j\omega})$$

由DTFT正、反变换定义可以得到

$$X_R(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_R(n)\cos(\omega n)+x_I(n)\sin(\omega n)\right]$$

$$X_I(e^{j\omega})=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_R(n)\sin(\omega n)-x_I(n)\cos(\omega n)\right]$$

$$x_R(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[X_R(e^{j\omega})\cos(\omega n)-X_I(e^{j\omega})\sin(\omega n)\right]d\omega$$

$$x_I(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[X_R(e^{j\omega})\sin(\omega n)+X_I(e^{j\omega})\cos(\omega n)\right]d\omega$$

如果$x(n)$是实信号，即$x_I(n)=0$

$X(e^{j\omega})$的实部是ω的偶函数

$X(e^{j\omega})$的虚部是ω的奇函数

$X(e^{j\omega})$的幅频响应是ω的偶函数

$X(e^{j\omega})$的相频响应是ω的奇函数

若$x(n)$是实偶函数，频谱虚部为0

若$x(n)$是实奇函数，频谱实部为0

存储上的冗余

DTFT的性质

- 奇、偶、虚、实、对称性

$$x(n)=x_R(n)+x_I(n)$$

$$X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+X_I(e^{j\omega})$$

由DTFT正、反变换定义可以得到

$$X_R(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_R(n)\cos(\omega n)+x_I(n)\sin(\omega n)\right]$$

$$X_I(e^{j\omega})=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_R(n)\sin(\omega n)-x_I(n)\cos(\omega n)\right]$$

$$x_R(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[X_R(e^{j\omega})\cos(\omega n)-X_I(e^{j\omega})\sin(\omega n)\right]d\omega$$

$$x_I(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[X_R(e^{j\omega})\sin(\omega n)+X_I(e^{j\omega})\cos(\omega n)\right]d\omega$$

如果$x(n)$是实信号，即$x_I(n)=0$

$X(e^{j\omega})$的实部是ω的偶函数

$X(e^{j\omega})$的虚部是ω的奇函数

$X(e^{j\omega})$的幅频响应是ω的偶函数

$X(e^{j\omega})$的相频响应是ω的奇函数

若$x(n)$是实偶函数，频谱虚部为0

若$x(n)$是实奇函数，频谱实部为0

DCT变换的根源

Wiener-Khinchin(维纳－辛钦定理)

- 功率信号x(n)的自相关函数和功率谱是一对傅里叶变换对

功率信号$x(n)$的功率谱密度定义为

$$P_x\left(e^{j\omega}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left|\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2,\text{其中}\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)=\mathcal{F}\left(\hat{x}(n)\right),\hat{x}(n)=\begin{cases}x(n) & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$$

则$x(n)$的自相关函数$r_x(m)$的傅里叶变换

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}r_x(m)e^{-j\omega m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x(n+m)\right]e^{-j\omega m}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)e^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+m)e^{-j\omega(n+m)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{x}(n)e^{-j\omega n}\right)^*\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+m)e^{-j\omega(n+m)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\hat{X}^*\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left|\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=P_x\left(e^{j\omega}\right)$$

典型信号的DTFT

- DTFT：时域是离散的，因此频域必是周期的

例如复正弦序列$x(n)=e^{j\omega_0 n}$

我们记得连续复正弦信号$e^{j\Omega_0 t}$的连续傅里叶变换是$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$,是一个位于$\Omega_0$处的$\delta$函数。对离散的复正弦序列，其DTFT也应该是$\omega_0$处的$\delta$函数，但是必然以$2\pi$为周期的周期性出现，即

$$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k),\quad k\in Z$$

利用这一结论可以得到实正弦序列、实余弦序列的**DTFT**

第三部分
离散时间信号的傅里叶变换及快速算法

- 1. 从连续信号的FT到离散信号的FT
- 2. 连续时间信号的抽样
- 3. 离散傅里叶级数
- 4. 离散傅里叶变换DFT
- 5. 频域采样理论
- 6. 与DFT有关的几个问题
- 7. 快速傅里叶变换

2.连续时间信号的抽样

- 抽样产生的问题

(1)计算机进行处理的必要步骤

(2)$x(t)$变成$x(nT_s)$，$X(j\Omega)$变成了$X(e^{j\omega})$，发生了什么变化？

(3)$X(j\Omega)$和$X(e^{j\omega})$有什么关系？

(4)能否从$x(nT_s)$恢复出$x(t)$

前面的知识为讨论上述问题做好了理论准备，而信号的采样(或抽样)定理是联结离散信号和连续信号的桥梁，是进行离散信号处理与离散系统设计的基础

Very important

第三部分
离散时间信号的傅里叶变换及快速算法

- 1. 从连续信号的FT到离散信号的FT
- 2. 连续时间信号的抽样
- 3. 离散傅里叶级数
- 4. 离散傅里叶变换DFT
- 5. 频域采样理论
- 6. 与DFT有关的几个问题
- 7. 快速傅里叶变换

3. 离散傅里叶级数

- 现在考虑时域和频域都离散的情况

设$\tilde{x}(nT_s)$是周期信号$\tilde{x}(t)$的抽样，$\tilde{x}(t)$的周期为$T, T_s = T/N$,即一个周期抽样N个点

将$\tilde{x}(t)$展成傅里叶级数得：$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}, X(k\Omega_0)$是离散非周期的，

$\Omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/NT_s$. 对$\tilde{x}(t)$抽样得到：

$$\tilde{x}(nT_s) = \tilde{x}(t)\Big|_{t=nT_s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k\Omega_0)\exp(jk\Omega_0 nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k\Omega_0)\exp(j\frac{2\pi}{N}kn)$$

$\tilde{X}(k\Omega_0)$为抽样后的频谱，抽样后频谱周期延拓，延拓周期为

$\Omega_s = 2\pi/T_s = 2\pi N/T = N\Omega_0$，$\Omega_0$为基波频率，说明抽样后频谱$\tilde{X}(k\Omega_0)$周期包含$N$个谐波，或周期为$N$个点，取其一个周期，并简记为$X(k)$

因为$\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\exp(j\frac{2\pi}{N}kn)$当$n$取$[0, N-1]$和$[N, 2N-1]$时结果完全一样，都是$\tilde{x}(nT_s)$的一个周期，记这$N$个值为$x(n), n$取$[0, N-1]$

3. 离散傅里叶级数

- 结论
  - 离散周期序列的频谱也是离散周期序列，频域离散是由于时域周期性引起的，而频域的周期性是由于时域的离散性引起的
  - 时域的抽样间隔T_s导致频域发生Ω_s的周期性，时域的周期T导致频域的离散(抽样)间隔为一个基波，即Ω_0。且满足$T/T_s=N=\Omega_s/\Omega_0$，即时域的周期为N个点，频域的周期也为N个点，且时域的N个点可以由频域的N个点求出

$$\boxed{x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)}$$

3. 离散傅里叶级数

- 对离散周期信号

$$DFS\begin{cases}\tilde{x}(n)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\exp(j\dfrac{2\pi}{N}nk) & n=-\infty\sim+\infty\\ \tilde{X}(k)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\exp(-j\dfrac{2\pi}{N}nk) & k=-\infty\sim+\infty\end{cases}$$

无限长离散周期序列

$$DFT\begin{cases}x(n)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}X(k)\exp(j\dfrac{2\pi}{N}nk) & n=0\sim N-1\\ X(k)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}x(n)\exp(-j\dfrac{2\pi}{N}nk) & k=0\sim N-1\end{cases}$$

有限长离散序列，实质仅取了一个周期

第三部分
离散时间信号的傅里叶变换及快速算法

- 1. 从连续信号的FT到离散信号的FT
- 2. 连续时间信号的抽样
- 3. 离散傅里叶级数
- 4. 离散傅里叶变换DFT
- 5. 频域采样理论
- 6. 与DFT有关的几个问题
- 7. 快速傅里叶变换

4. 离散傅里叶变换DFT

- 四种形式的傅里叶变换
  - FT，FS，DTFT，DFS
- 计算机处理信号
  - 时域和频域都是离散的，有限长的
  - 只有DFS在时域频域都是离散的，变换核 $\exp(\pm j\frac{2\pi}{N}nk)$ 相对于n和k都是以N为周期的
  - 只要保证时域是周期N，则频域也是周期N，而且有频域一个周期内反变换可以得到时域一个周期的信号
  - 于是时域频域都只取一个周期，对实际计算机处理的离散有限长信号进行周期延拓

4. 离散傅里叶变换DFT

- 定义

$$\begin{cases} X(k)=\sum_{k=0}^{N-1}x(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}nk) & k=0\sim N-1 \\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\exp(j\frac{2\pi}{N}nk) & n=0\sim N-1 \end{cases}$$

习惯上记$W_N=\exp(-j\frac{2\pi}{N})$,故

$$\begin{cases} X(k)=\sum_{k=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} & k=0\sim N-1 \\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} & n=0\sim N-1 \end{cases}$$

4. 离散傅里叶变换DFT

- 用计算机分析信号频谱
  - 如果x(n)是有限长的，对其进行DFT的结果实际上是将x(n)进行周期延拓，对应DFS系数的一个周期而已
  - 如果x(n)是无限长的，用窗函数将其截短，再用DFT分析
  - 问题是
    - x(n)的真实频谱是DTFT得到的，与DFT并不一样，如何估计真实的频谱？
    - 将无限长序列截短对原信号频谱有何影响？
    - DFT的周期延拓实质导致其性质有所变化

试着用图形方法来解释DFT的导出过程

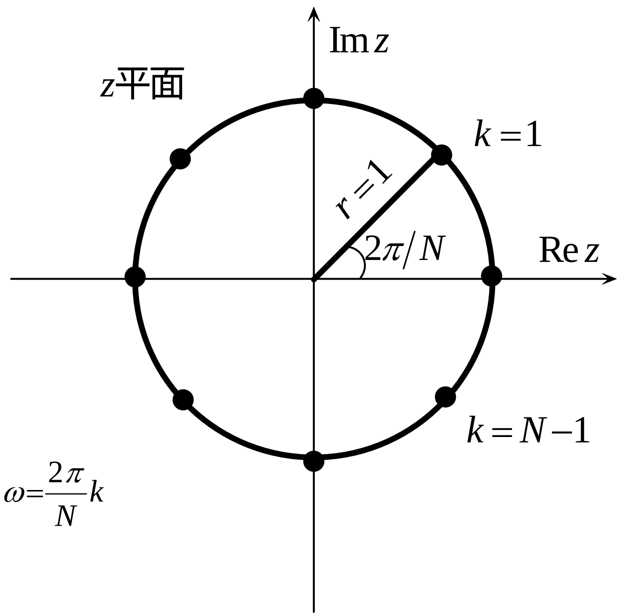
4. DFT与DTFT及Z变换的关系

若$x(n)$长度为N,其Z变换、DTFT及DFT分别是

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)(re^{j\omega})^{-n}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}=X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}nk)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$



z变换中z在$X(z)$的收敛域内取值，$X(e^{j\omega})$仅在单位圆上取值

$X(k)$则是在单位圆上将2π弧度进行等间距的N点抽样

4.DFT的性质

- 线性

$$DFT\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=aX_1(k)+bX_2(k)$$

- 正交性(记住这种简洁的描述形式！)

$$\mathbf{W}_N=\left[W_N^{nk}\right]=\begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_N=\left[X(0)\quad X(1)\quad \cdots \quad X(N-1)\right]^T$$

$$\mathbf{x}_N=\left[x(0)\quad x(1)\quad \cdots \quad x(N-1)\right]^T$$

则DFT的正变换可写成矩阵形式，即 $\mathbf{X}_N=\mathbf{W}_N\mathbf{x}_N$

4.DFT的性质

- 正交性(cont.) (记住这种简洁的描述形式！)

$$\mathbf{W}_N=\left[W_N^{nk}\right]=\begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_N=\left[X(0)\quad X(1)\quad\cdots\quad X(N-1)\right]^T,\mathbf{x}_N=\left[x(0)\quad x(1)\quad\cdots\quad x(N-1)\right]^T$$

则DFT的正变换可写成矩阵形式，即 $\mathbf{X}_N=\mathbf{W}_N\mathbf{x}_N$

考虑$\mathbf{R}=\mathbf{W}_N^*\mathbf{W}_N$，则$\mathbf{R}_{(m,n)}=\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-mk}W_N^{nk}=\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(n-m)k}=\begin{cases}N & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$

故$\mathbf{R}=\mathbf{W}_N^*\mathbf{W}_N=N\mathbf{I}$，或$\mathbf{W}_N^{-1}=\dfrac{1}{N}\mathbf{W}_N^*$，$\mathbf{W}_N^*$与$\mathbf{W}_N$是正交的

则DFT的反变换可以写成$\mathbf{x}_N=\mathbf{W}_N^{-1}\mathbf{X}_N=\dfrac{1}{N}\mathbf{W}_N^*\mathbf{X}_N$

4.DFT的性质

- 移位性质

$$DFT\left[x(n+m)\right]=W_N^{-km}X(k),DFT\left[x(n-m)\right]=W_N^{km}X(k)$$

$$\boxed{\text{记住：}W_N=\exp(-j\frac{2\pi}{N}),\quad \omega\Rightarrow\frac{2\pi}{N}k\text{,单位圆等分,频率变量从}\omega\text{变成}k}$$

- 奇、偶、虚、实、对称性
  - 与DTFT对应
- Parseval定理

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2}$$

4.DFT的性质

■ 时域循环卷积

设序列$x(n)$和$h(n)$都是N点序列，其DFT分别为$X(k)$和$H(k)$。$x(n)$和$h(n)$的循环卷积(或圆周卷积)$y(n)$定义为

$$y(n \bmod N)=x(n)\circledast h(n)=\sum_{i=0}^{N-1} x(i \bmod N)h(n-i \bmod N)$$

式中$(n \bmod N)$是以N为模对n求余，$\circledast$表示循环卷积

若$y(n)=x(n)\circledast h(n)$,

则

$$Y(k)=X(k)H(k)$$

即两个以N为周期的周期序列进行线性卷积，只保留结果的一个主值区间结果

循环卷积的矩阵形式

想想线性卷积的矩阵形式，区别？

考虑$N=3$时

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(-1) & h(-2) \\ h(1) & h(0) & h(-1) \\ h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix}$$

,因$h(n)$以3为周期，故

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix}$$

循环矩阵，

注意循环特点

对任意N

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(N-1) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{Hx}$$

线性卷积的矩阵形式

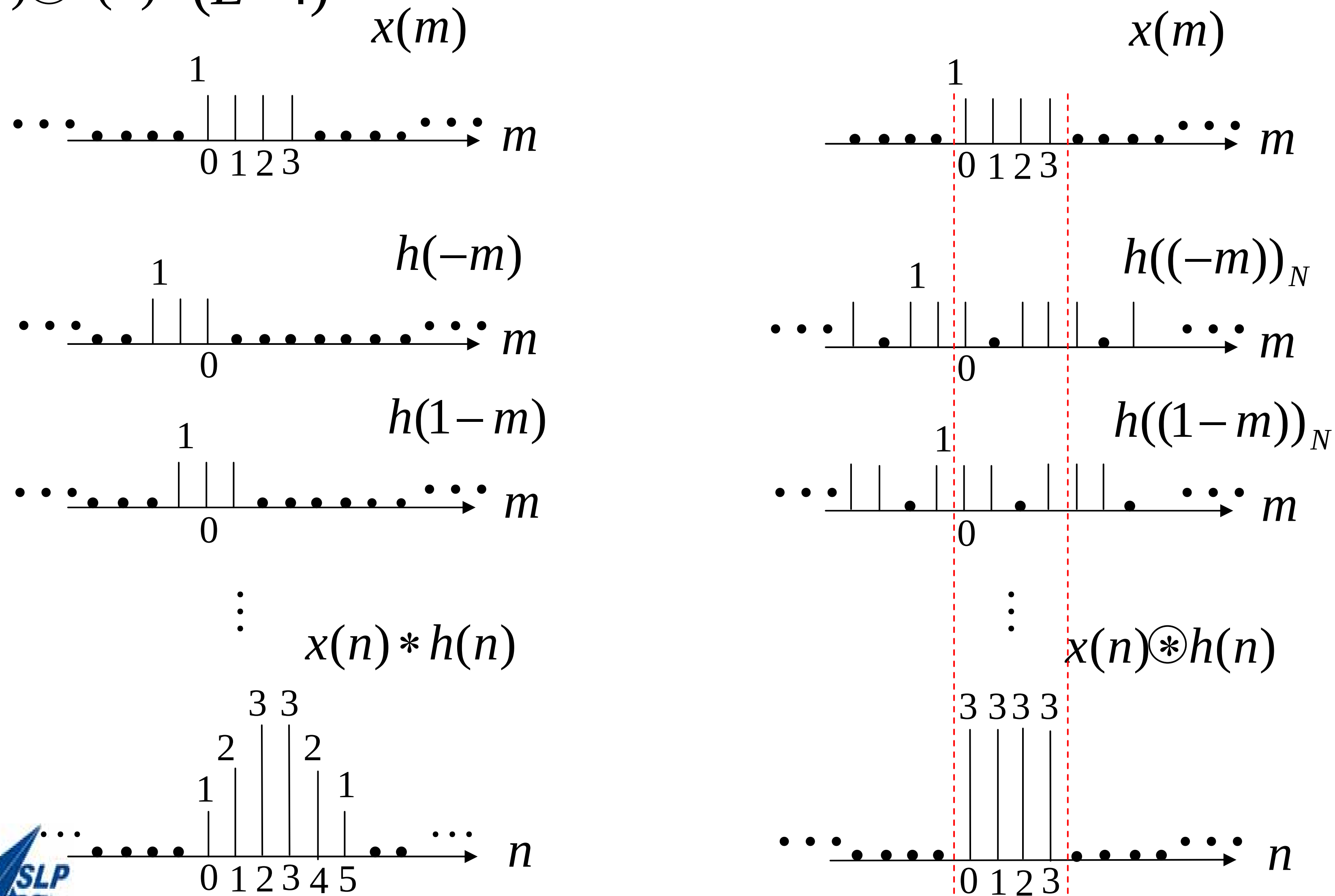
线性卷积$y(n)=x(n)*h(n)$,若$x(n)$长度为M，$h(n)$长度为N，则$y(n)$长度为$M+N-1$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(M-1) \\ y(N-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ h(M-1) & \cdots & \cdots & h(0) \\ \vdots & \ddots & & \\ h(N-1) & \cdots & \cdots & h(N-M) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(M-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{H}\mathbf{x}$$

例：$x(n)=R_4(n)$ $h(n)=R_3(n)$ 分别求 $x(n)*h(n)$

$x(n)\circledast h(n)$ $(L=4)$



用DFT计算线性卷积

线性卷积$y(n)=x(n)*h(n)$,若$x(n)$长度为M，$h(n)$长度为L，则$y(n)$长度为$M+L-1$。可采用如下步骤用DFT计算线性卷积

1. 对$x(n)$和$h(n)$分别补零扩展成长度为$M+L-1$

$$x'(n)=\begin{cases} x(n) & n=0,1,2,\cdots,M-1 \\ 0 & n=M,M+1,\cdots,M+L-2 \end{cases}$$

$$h'(n)=\begin{cases} h(n) & n=0,1,2,\cdots,L-1 \\ 0 & n=L,L+1,\cdots,M+L-2 \end{cases}$$

2. 直接计算$x(n)$和$h(n)$的圆周卷积

3. 若用DFT，则$y(n)=y'(n)=IDFT\left[X'(k)H'(k)\right]$

第三部分
离散时间信号的傅里叶变换及快速算法

- 1. 从连续信号的FT到离散信号的FT
- 2. 连续时间信号的抽样
- 3. 离散傅里叶级数
- 4. 离散傅里叶变换DFT
- 5. 频域采样理论
- 6. 与DFT有关的几个问题
- 7. 快速傅里叶变换

5. 频域采样理论

- 问题的提出：
  - 对于序列x(n)的实际频率特性exp(jω)，是否能用频域采样的办法逼近以及重建

实际上DFT就可以看成是离散序列频域抽样的结果

对$x(n)$的DTFT频谱$X(e^{j\omega})$以间隔$\frac{2\pi}{N}$进行抽样，即$\tilde{X}(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(e^{j\omega})\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$

则抽样之后得到的时域序列变成(即IDTFT)

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(e^{j\omega})\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\frac{N}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{j\omega mN}e^{j\omega n}d\omega=\frac{N}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega(n+mN)}d\omega$$

$$=\frac{N}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN)$$

时域以N为周期延拓，
与前面DFT结论一致

5. 频域采样理论

- 频域采样定理
  - 对长度为M的序列x(n)的频谱exp(jω)进行抽样，如果一个周期内(即2π)内抽样N点，则时域序列发生了以N为周期的周期延拓。要使延拓后的周期序列能够恢复出原始序列x(n)，即没有混叠，必须满足N≥M
- 重建原序列

在不发生混叠的前提下$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$, 因此$X(e^{j\omega})=\tilde{X}(e^{j\omega})*R_N(e^{j\omega})$

其中

$$R_N(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{j\omega N}}{1-e^{j\omega}}=e^{j\omega(N-1)/2}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

5. 频域采样理论

- 频域采样定理
  - 对长度为M的序列x(n)的频谱exp(jω)进行抽样，如果一个周期内(即2π)内抽样N点，则时域序列发生了以N为周期的周期延拓。要使延拓后的周期序列能够恢复出原始序列x(n)，即没有混叠，必须满足N≥M
- 重建原序列

离散形sinc函数

在不发生混叠的前提下$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$, 因此$X(e^{j\omega})=\tilde{X}(e^{j\omega})*R_N(e^{j\omega})$

其中

$$R_N(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{j\omega N}}{1-e^{j\omega}}=e^{j\omega(N-1)/2}\boxed{\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}}$$

5. 频域采样理论

- 频域采样定理
  - 对长度为M的序列x(n)的频谱exp(jω)进行抽样，如果一个周期内(即2π)内抽样N点，则时域序列发生了以N为周期的周期延拓。要使延拓后的周期序列能够恢复出原始序列x(n)，即没有混叠，必须满足N≥M
- 重建原序列

$X(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega})$，而在一个周期$2\pi$内，$\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(k)$，因此重建一个周期的$X(e^{j\omega})$可以由$X(k) * e^{j\omega(N-1)/2} \dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$得到

第三部分
离散时间信号的傅里叶变换及快速算法

- 1. 从连续信号的FT到离散信号的FT
- 2. 连续时间信号的抽样
- 3. 离散傅里叶级数
- 4. 离散傅里叶变换DFT
- 5. 频域采样理论
- 6. 与DFT有关的几个问题
- 7. 快速傅里叶变换

6. 与DFT有关的几个问题

- 频率分辨率和时间分辨率
  - 频率\时间分辨率即DFT所能区分的两个频域\时域冲激之间的最小间隔$\Delta f \setminus \Delta T$
  - Δf反比于数据的实际长度，ΔT取决于抽样间隔
- 信号的时宽和带宽
  - 时宽和带宽不会同时缩小，也不会同时增大；不会同为有限值(若时间长度有限，则带宽必然无限，反之亦然)想一想窗函数或冲激函数
  - 等效时宽TW和等效带宽FW满足

$$TW \bullet FW \geq 1/4\pi$$

不定原理
(uncertainty principle)

$$\boxed{\begin{aligned} TW^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left|x(n)\right|^2 \Big/ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 \\ TF^2 &= \int_{-f_s/2}^{f_s/2} f^2 \left|X(f)\right|^2 df \Big/ \int_{-f_s/2}^{f_s/2} \left|X(f)\right|^2 df \end{aligned}}$$

6. 与DFT有关的几个问题

- 信号的截短和补零
  - 截短导致频谱泄漏(因为与sinc卷积)
  - 补零可以改善泄漏(因为时间窗更长，sinc主瓣更窄)可以提高计算分辨率，但因增加的不是实际信号，故无法提高实际的频率分辨率
- 关于窄带信号的抽样
  - 可以通过频移降低采样率，相应得到窄带信号采样定理
- 关于正弦信号的抽样
  - 参考胡广书的教材

第三部分
离散时间信号的傅里叶变换及快速算法

- 1. 从连续信号的FT到离散信号的FT
- 2. 连续时间信号的抽样
- 3. 离散傅里叶级数
- 4. 离散傅里叶变换DFT
- 5. 频域采样理论
- 6. 与DFT有关的几个问题
- 7. 快速傅里叶变换

7. 快速傅里叶变换

快速算法的可能性

$$\begin{cases} X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad k=0,1,\cdots,N-1, \quad W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}} \\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \quad n=0,1,\cdots,N-1, \end{cases}$$

求出N点$X(k)$需要N^2次复数乘法及$N(N-1)$次复数加法

时间过长，难于“实时”实现，影响应用

包含大量重复计算

因为k,n及N均为整数，序列W_N^{nk}具有如下性质：

(1) 周期性 $W_N^{nk}=W_N^{(n+N)k}=W_N^{n(k+N)}$

(2) 对称性 $W_N^{-nk}=\left(W_N^{nk}\right)^*=W_N^{(N-n)k}=W_N^{n(N-k)}$

(3) 正交姓 $\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk}=\begin{cases} N & n=rN, r\text{为整数} \\ 0 & \text{其他}n \end{cases}$

(4) 当$N=rM$时，$W_N^r=W_{N/r}^1=W_M^1; W_N^0=1, W_N^{N/2}=-1, W_N^{N/4}=-j$等

通过合理的安排计算顺序，可以大大简化

7. 快速傅里叶变换

- 例如计算四点DFT
  - 按定义需要4×4=16次复数乘法

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & -1 & -W_4^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W_4^1 & -1 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

将矩阵的第(2)列与第(3)列交换

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W_4^1 & -W_4^1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -W_4^1 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(1) \\ x(3) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} X(0) &= [x(0)+x(2)]+[x(1)+x(3)] \\ X(1) &= [x(0)-x(2)]+[x(1)-x(3)]W_4^1 \\ X(2) &= [x(0)+x(2)]-[x(1)+x(3)] \\ X(3) &= [x(0)-x(2)]-[x(1)-x(3)]W_4^1 \end{aligned}$$

只需要一次复数乘法！

7. 快速傅里叶变换

- 快速傅里叶变换的发展
  - Cooley和Tukey提出的FFT(Fast Fourier Transform)使N点DFT的乘法计算量从 N^2 降为 $\frac{N}{2}\log_2 N$
  - 这一重要发现是数字信号处理发展史上的转折点、里程碑，极大的促进了其应用
  - 新的算法不断涌现，两个方向
    - 针对N是2的整数次幂，如基2算法、基4算法、…
    - N不等于2的整数次幂，Winograd算法等，其意义和特点

7. FFT—时间抽取(DIT)基2FFT算法

- 先考虑N=2的情况 $\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$

- 再考虑N=2^M的情况

将$x(n)$按奇偶分成两组

$$X(K) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk}$$

令$A(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk}$, 为$N/2$点DFT($k$=0,1,$\cdots$,$N/2$-1)，且$x_1(r) = x(2r)$,

令$B(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk}$, 为$N/2$点DFT($k$=0,1,$\cdots$,$N/2$-1)，且$x_2(r) = x(2r+1)$

因此，当k=0,1,$\cdots$,$N/2$-1时，$X(k) = A(k) + W_N^k B(k)$

同理可得$X(k+N/2) = A(k) - W_N^k B(k)$

7. FFT—时间抽取(DIT)基2FFT算法

- 先考虑N=2的情况 $\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$

- 再考虑N=2^M的情况

将$x(n)$按奇偶分成两组

$$X(K) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk}$$

令$A(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk}$, 为$N/2$点DFT($k$=0,1,$\cdots$,$N/2$-1)，且$x_1(r) = x(2r)$,

令$B(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk}$, 为$N/2$点DFT($k$=0,1,$\cdots$,$N/2$-1)，且$x_2(r) = x(2r+1)$

因此，当k=0,1,$\cdots$,$N/2$-1时，$X(k) = A(k) + W_N^k B(k)$

同理可得$X(k+N/2) = A(k) - W_N^k B(k)$

此时A(k)是由x(n)的偶数项DFT得到，B(k)是由x(n)的奇数项DFT得到

7. FFT—时间抽取(DIT)基2FFT算法

- 先考虑N=2的情况 $\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}$

- 再考虑N=2^M的情况

将$x(n)$按奇偶分成两组

$$X(K) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}$$

令$A(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk}$，为$N/2$点DFT($k$=0,1,$\cdots$,$N/2$-1)，且$x_1(r) = x(2r)$,

令$B(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk}$，为$N/2$点DFT($k$=0,1,$\cdots$,$N/2$-1)，且$x_2(r) = x(2r+1)$

因此，当k=0,1,$\cdots$,$N/2$-1时，$X(k) = A(k) + W_N^k B(k)$

同理可得$X(k+N/2) = A(k) - W_N^k B(k)$

对于2^M序列的DFT可以逐步递归到N=2的情况

7. FFT—时间抽取(DIT)基2FFT算法

- 观察递归特点

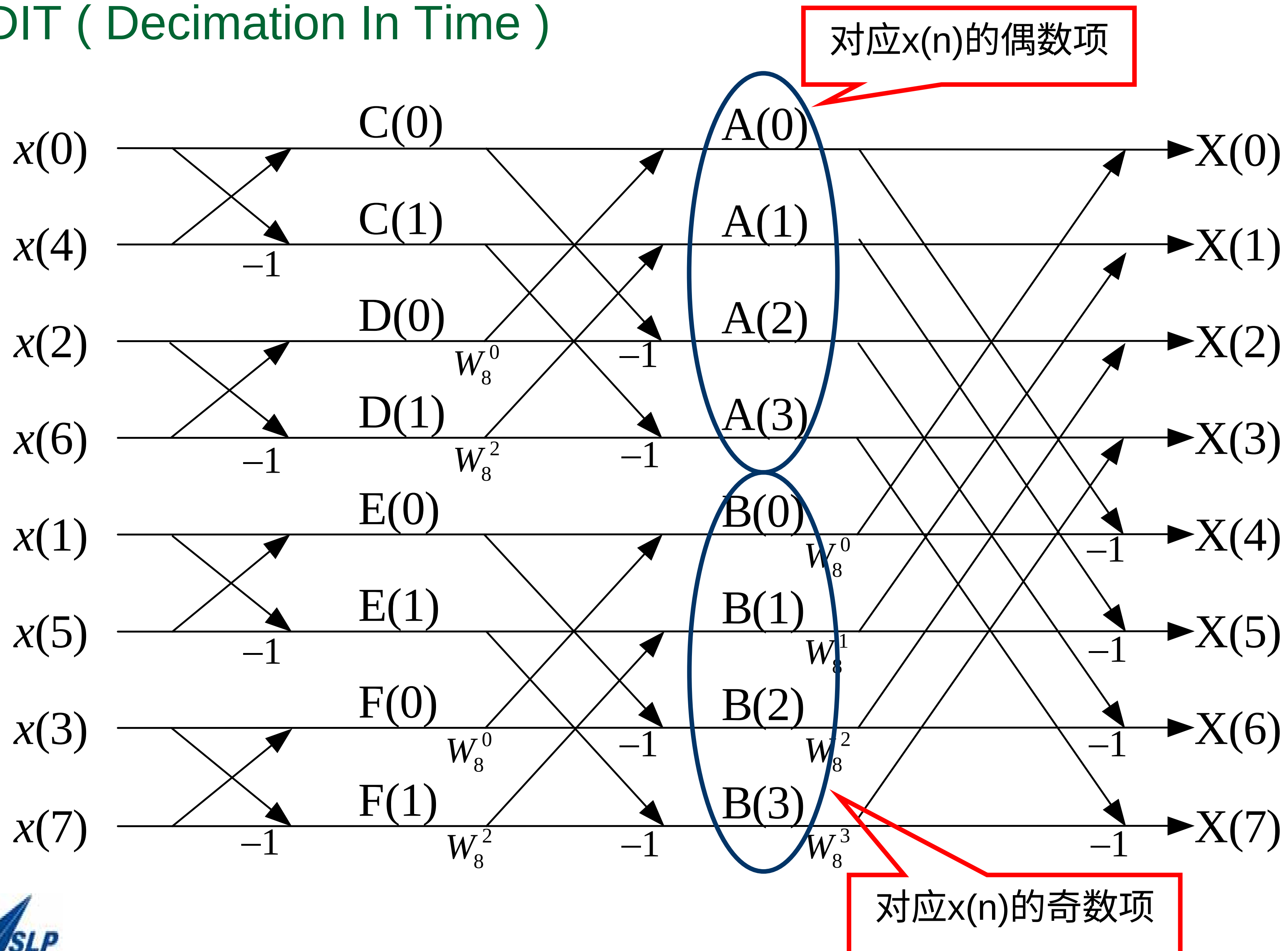
$$\begin{cases} X(k) = A(k) + W_N^k B(k), \ k=0,1,\cdots,N/2\text{-}1 \\ X(k+N/2) = A(k) - W_N^k B(k), \ k=0,1,\cdots,N/2\text{-}1 \end{cases}$$

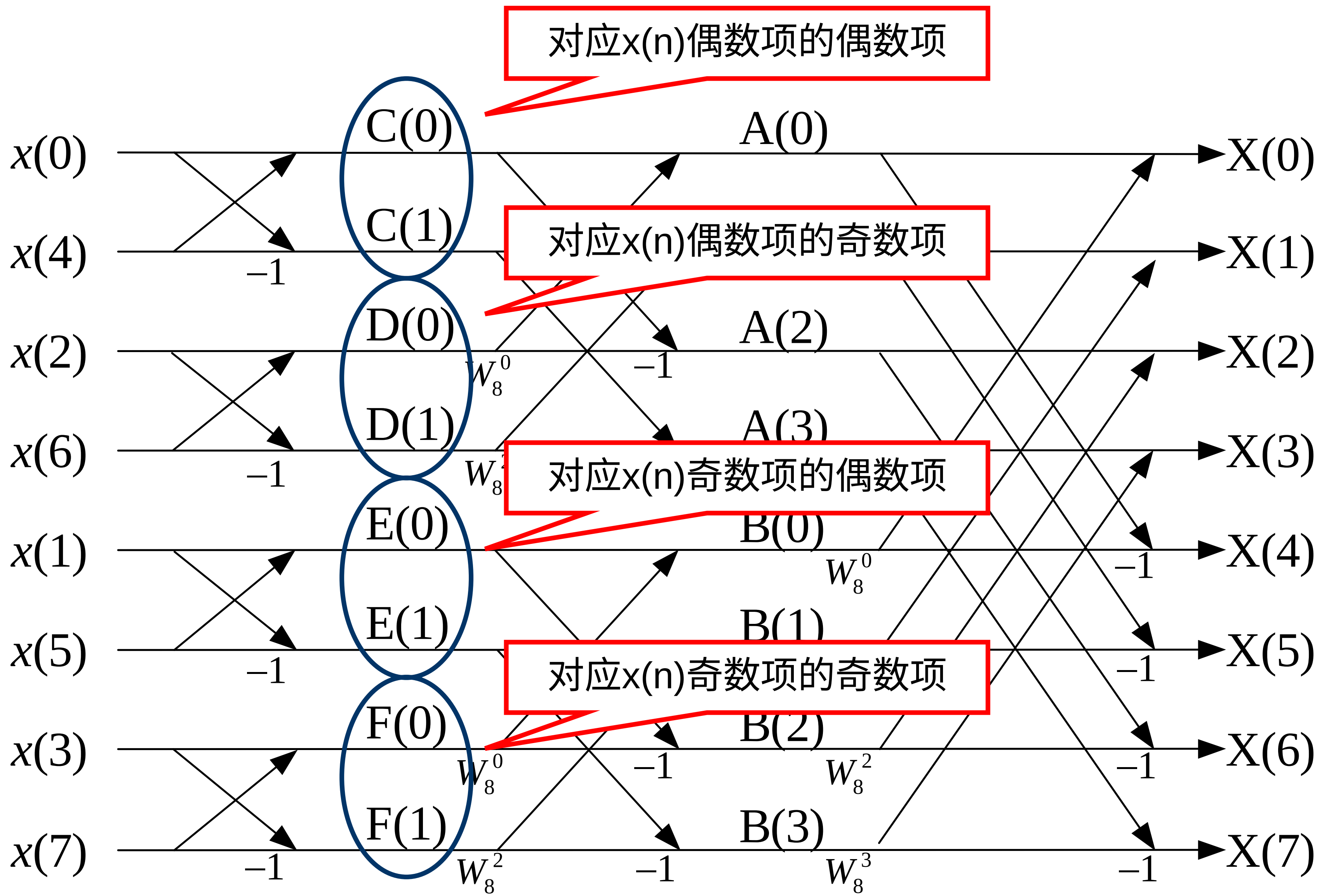
即N点的频域序列$X(k)$转换成$N/2$点的频域序列$A(k)$和$B(k)$构成，其中$A(k)$是由$X(k)$对应序列$x(n)$的偶序列DFT得到，$B(k)$由$X(k)$对应序列$x(n)$的奇序列DFT得到。这样，可以将N点的频域序列不断的分解，直到分解为2点频域序列，即可直接计算

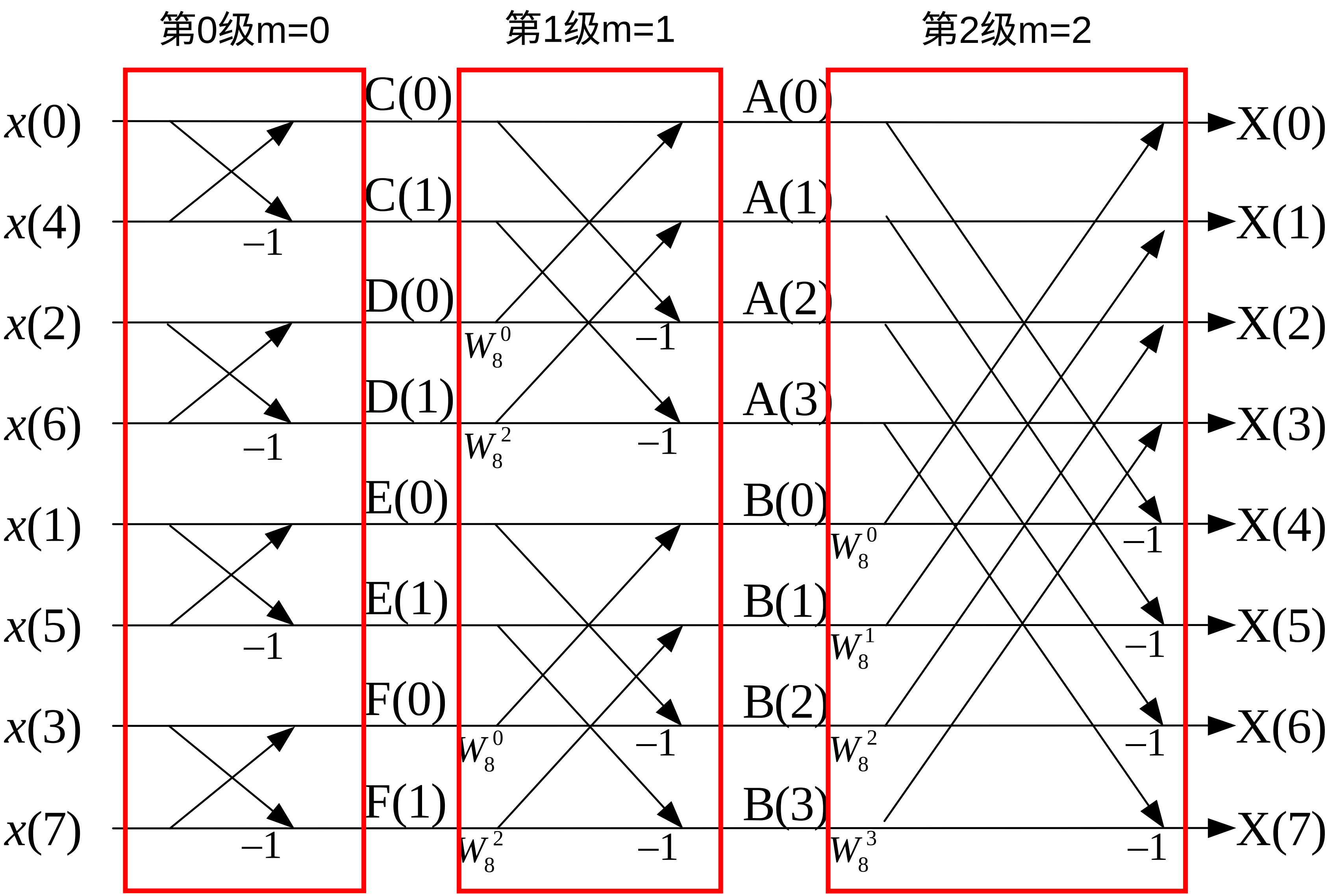
注意！是频域数据在发生迭代，直至N=2

$$\boxed{X_N^{(1)}(k) \Rightarrow X_{N/2}^{(2)}(k) \Rightarrow X_{N/4}^{(3)}(k) \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_2^{\log_2 N}(k) \rightarrow x(n)}$$

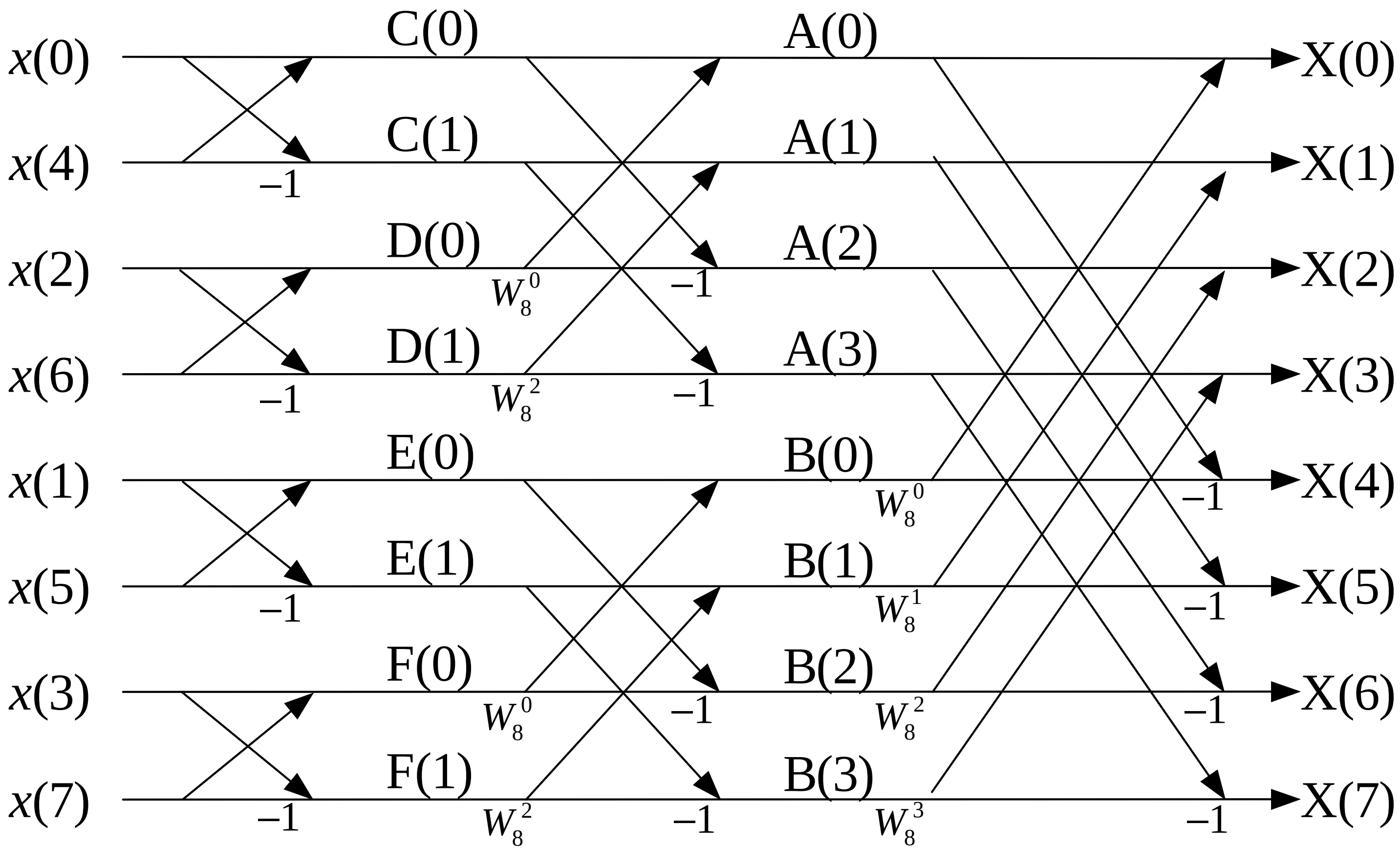
DIT（Decimation In Time）



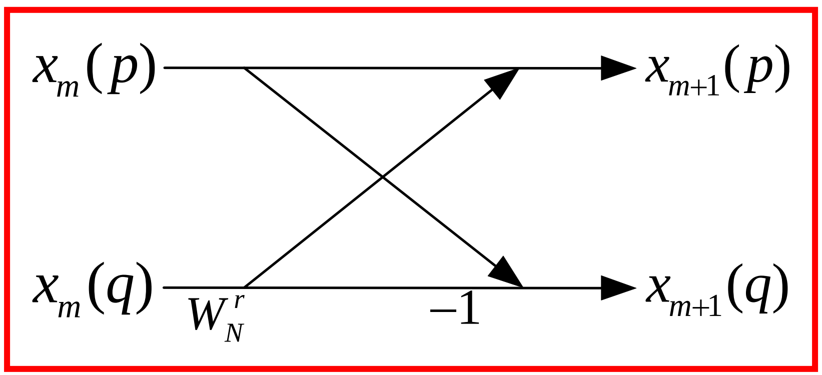

对应x(n)偶数项的偶数项
对应x(n)偶数项的奇数项
对应x(n)奇数项的偶数项
对应x(n)奇数项的奇数项
x(0)
x(4)
x(2)
x(6)
x(1)
x(5)
x(3)
x(7)
C(0)
C(1)
D(0)
D(1)
E(0)
E(1)
F(0)
F(1)
A(0)
A(2)
A(3)
B(0)
B(1)
B(2)
B(3)
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)
–1
W_8^0
W_8^2
W_8^3


第0级m=0
第1级m=1
第2级m=2
x(0)
x(4)
x(2)
x(6)
x(1)
x(5)
x(3)
x(7)
C(0)
C(1)
D(0)
D(1)
E(0)
E(1)
F(0)
F(1)
A(0)
A(1)
A(2)
A(3)
B(0)
B(1)
B(2)
B(3)
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)
–1
W_8^0
W_8^1
W_8^2
W_8^3

共分$M=\log_2 N$级

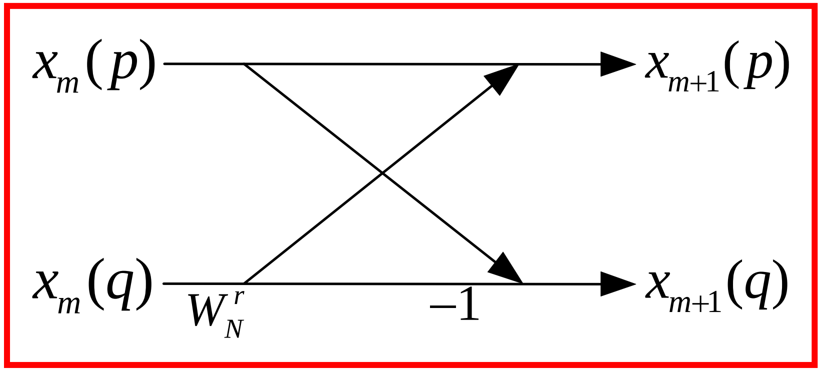


第m级蝶形单元



输入输出可以存放于同一地址，即“同址运算”

第m级蝶形单元



输入输出可以存放于同一地址，即“同址运算”

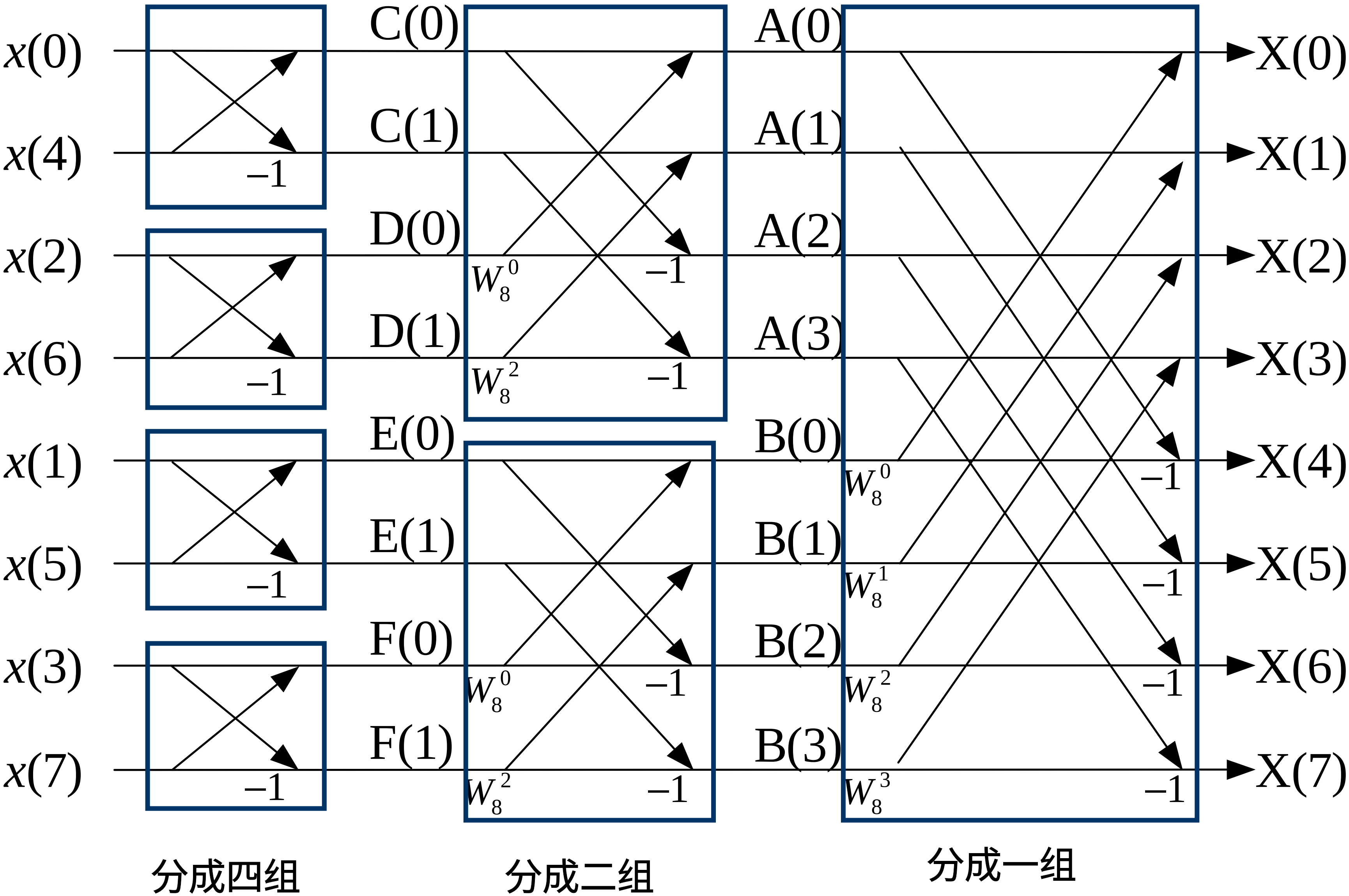
每个蝶形单元只需要一次复数乘法，两次复数加法

每一级只有N/2个蝶形单元

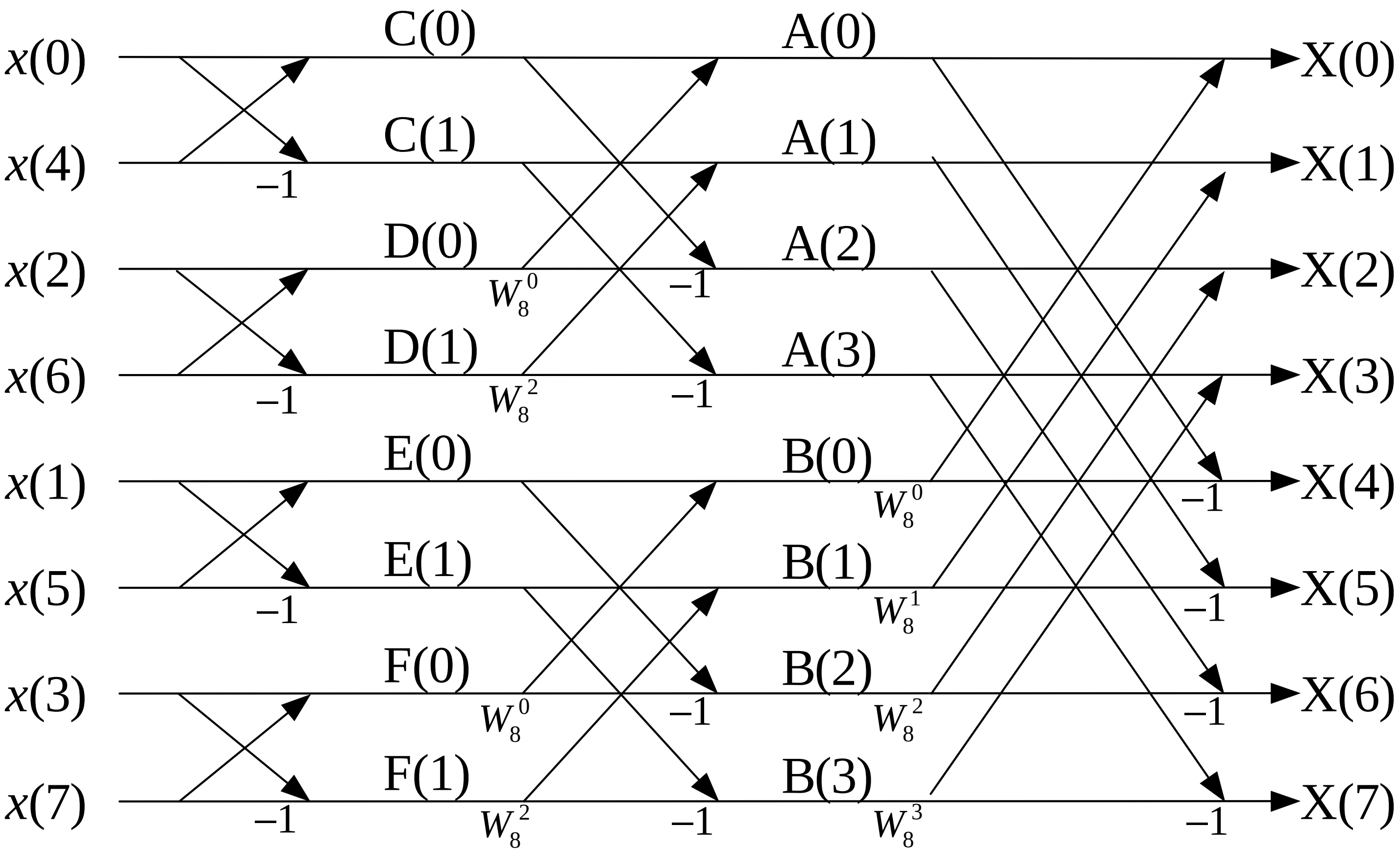
故对N点FFT,可分$\log_2 N$级，共需要

复数乘法$\dfrac{N}{2}\log_2 N = MN/2$

复数加法$N\log_2 N = MN$


x(0)
x(4)
x(2)
x(6)
x(1)
x(5)
x(3)
x(7)
C(0)
C(1)
D(0)
D(1)
E(0)
E(1)
F(0)
F(1)
A(0)
A(1)
A(2)
A(3)
B(0)
B(1)
B(2)
B(3)
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)
–1
W_8^0
W_8^1
W_8^2
W_8^3
分成四组
分成二组
分成一组

组具有相同的结构



$$\begin{cases} X(k) = A(k) + W_N^k B(k), & k=0,1,\cdots,N/2\text{-}1 \\ X(k+N/2) = A(k) - W_N^k B(k), & k=0,1,\cdots,N/2\text{-}1 \end{cases}$$

当前组包括L点分解时，W因子的标定为$W_L^k, k=0,1,\cdots,N/2\text{-}1$

码位倒置

$x(0)$	$X(0)$	0	0	0
$x(4)$	$X(1)$	4	2	1
$x(2)$	$X(2)$	2	4	2
$x(6)$	$X(3)$	6	6	3
$x(1)$	$X(4)$	1	1	4
$x(5)$	$X(5)$	5	3	5
$x(3)$	$X(6)$	3	5	6
$x(7)$	$X(7)$	7	7	7

写成二进制

二进制码翻转

000	000
100	001
010	010
110	011
001	100
101	101
011	110
111	111

7. FFT—频率抽取(DIF)基2FFT算法

- 根据时频域的对偶关系，也可以将频域X(k)的序号k按奇、偶分开

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$\begin{aligned}X(2r)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n2r}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{n2r}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{n2r}\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_{N/2}^{nr}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n+N/2)W_{N/2}^{nr}W_{N/2}^{Nr/2}\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}\underline{\big(x(n)+x(n+N/2)\big)}W_{N/2}^{nr},\quad\left(W_{N/2}^{Nr/2}=e^{-j2\pi r}=1\right)\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}g(n)W_{N/2}^{nr}\end{aligned}$$

7. FFT—频率抽取(DIF)基2FFT算法

- 根据时频域的对偶关系，也可以将频域X(k)的序号k按奇、偶分开

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$\boxed{X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}g(n)W_{N/2}^{nr},\ \text{其中} g(n)=x(n)+x(n+N/2);}$$

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n(2r+1)}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{n2r}W_N^{n}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{n2r}W_N^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_{N/2}^{nr}W_N^{n}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n+N/2)W_{N/2}^{nr}W_{N/2}^{Nr/2}W_N^{n}W_N^{N/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\underline{\big(x(n)-x(n+N/2)\big)W_N^{n}}W_{N/2}^{nr},\qquad \left(W_{N/2}^{Nr/2}=e^{-j2\pi r}=1,\ W_N^{N/2}=-1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)W_{N/2}^{nr}$$

7. FFT—频率抽取(DIF)基2FFT算法

- 根据时频域的对偶关系，也可以将频域X(k)的序号k按奇、偶分开

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$\boxed{X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}g(n)W_{N/2}^{nr},\ \text{其中}g(n)=x(n)+x(n+N/2);}$$

$$\boxed{X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)W_{N/2}^{nr},\ \text{其中}h(n)=\big(x(n)-x(n+N/2)\big)W_N^{n};}$$

又把一个N点问题变成N/2点的问题

7. FFT—频率抽取(DIF)基2FFT算法

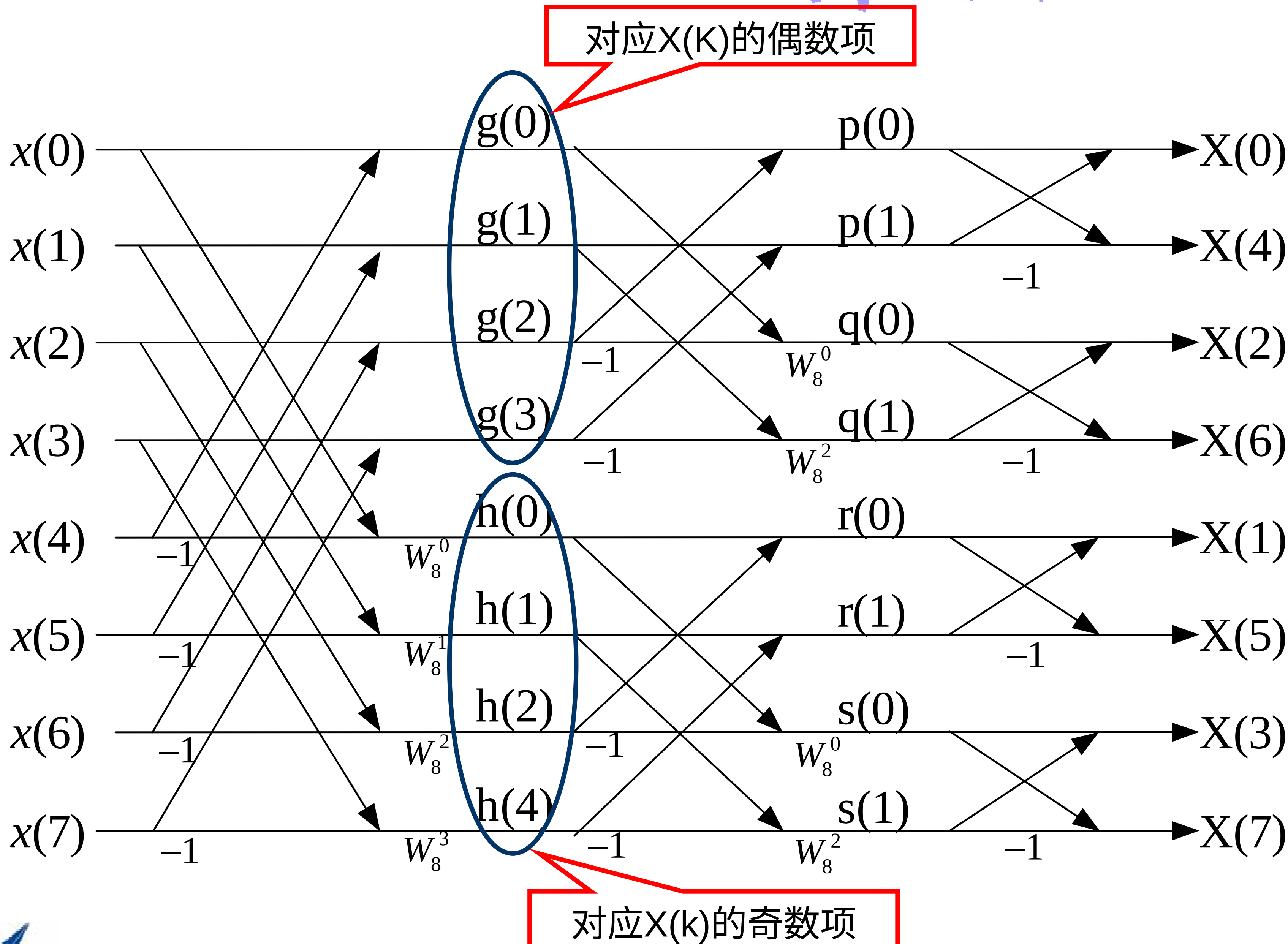
- 观察递归特点

$$\begin{cases} X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1} g(n)W_{N/2}^{nr},\ \text{其中} g(n)=x(n)+x(n+N/2); \\ X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)W_{N/2}^{nr},\ \text{其中} h(n)=\big(x(n)-x(n+N/2)\big)W_N^n; \end{cases}$$

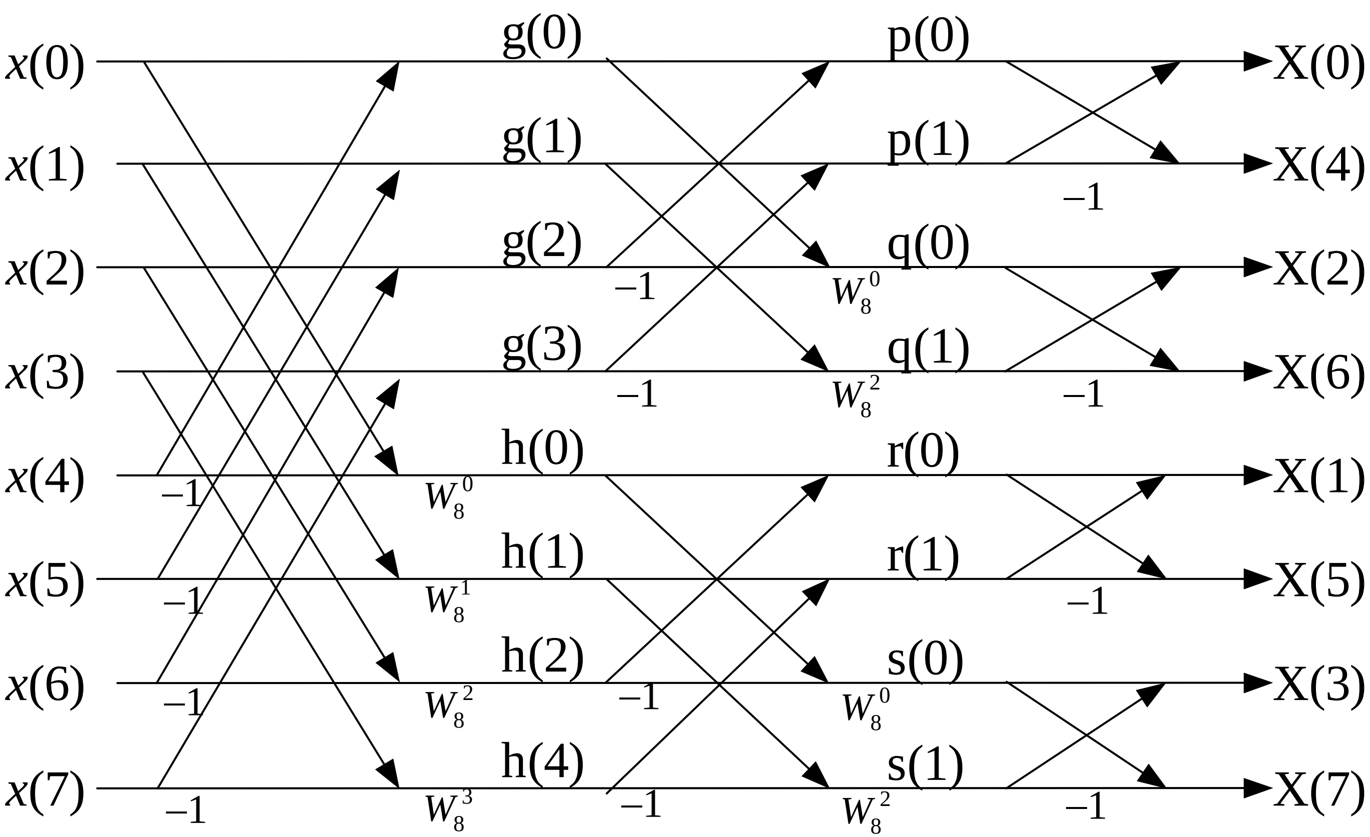
递归由长度为$N/2$的时域序列$g(n)$和$h(n)$传递，它们由长度为N的时域序列$x(n)$的前半部和后半部构成。这样可以不断将N点的时域序列按前半部、后半部分解，直到分解为长度为2的时域序列，即可直接得到频域序列

注意！是时域数据在发生迭代，直至N=2

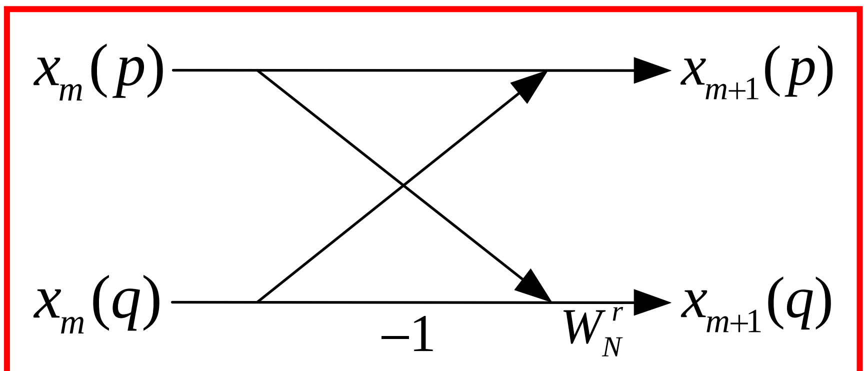
$$x_N^{(1)}(n)\Rightarrow x_{N/2}^{(2)}(n)\Rightarrow x_{N/4}^{(3)}(n)\Rightarrow\cdots\Rightarrow x_2^{\log_2 N}(n)\rightarrow X(k)$$



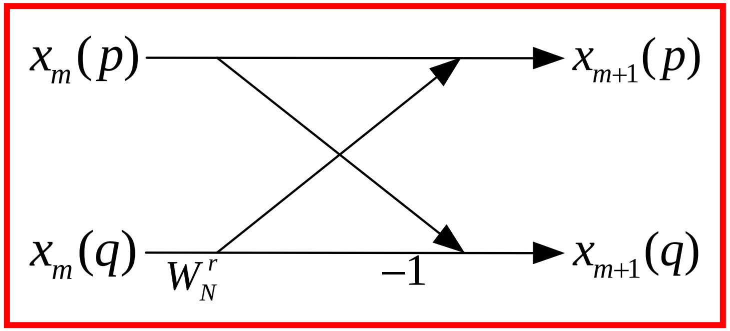
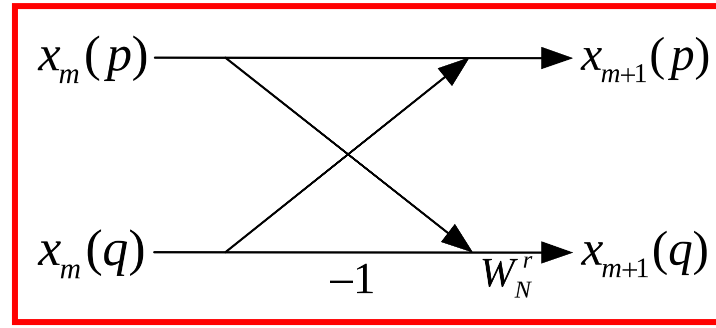
对应X(K)的偶数项
x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
x(7)
g(0)
g(1)
g(2)
g(3)
h(0)
h(1)
h(2)
h(4)
p(0)
p(1)
q(0)
q(1)
r(0)
r(1)
s(0)
s(1)
X(0)
X(4)
X(2)
X(6)
X(1)
X(5)
X(3)
X(7)
–1
W_8^0
W_8^1
W_8^2
W_8^3
对应X(k)的奇数项


x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
x(7)
g(0)
g(1)
g(2)
g(3)
h(0)
h(1)
h(2)
h(4)
p(0)
p(1)
q(0)
q(1)
r(0)
r(1)
s(0)
s(1)
X(0)
X(4)
X(2)
X(6)
X(1)
X(5)
X(3)
X(7)
–1
W_8^0
W_8^1
W_8^2
W_8^3

第m级蝶形单元


$x_m(p)$
$x_m(q)$
$x_{m+1}(p)$
$x_{m+1}(q)$
–1
W_N^r

DIT和DIF的对偶性

	DIT	DIF
蝶形单元		
传递数据	频域序列	时域序列

码位倒置

DIT 输入	DIT 输出	DIF 输入	DIF 输出
$x(0)$	X(0)	$x(0)$	X(0)
$x(4)$	X(1)	$x(1)$	X(4)
$x(2)$	X(2)	$x(2)$	X(2)
$x(6)$	X(3)	$x(3)$	X(6)
$x(1)$	X(4)	$x(4)$	X(1)
$x(5)$	X(5)	$x(5)$	X(5)
$x(3)$	X(6)	$x(6)$	X(3)
$x(7)$	X(7)	$x(7)$	X(7)

7. FFT—IFFT的运算方法

- 观察DFT和IDFT公式

$$\begin{cases} X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} \quad k=0,1,\cdots,N-1, \quad W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}} \\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} \quad n=0,1,\cdots,N-1, \end{cases}$$

不难发现，只要把FFT计算网格中的W_N^r改为W_N^{-1},再把所有的时域序列$x(n)$和频域序列$X(K)$互换(包括中间单元)，最后再乘以$1/N$即可

上述方法还是需要再编写一个IFFT程序，进一步考虑

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{nk}\right]^*=\frac{1}{N}\left[FFT(X^*(k))\right]^*$$

即将$X(K)$取共轭，对其进行FFT，结果再取一次共轭，并再乘以$1/N$即可

再想想：$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{(N-n)k}=\frac{1}{N}x'(N-n)$ ？？？

7. FFT—用FFT计算线性卷积