数字信号处理
Digital Signal Processing

付中华
mailfzh@nwpu.edu.cn
http://www.nwpu-aslp.org/gary/

第二部分
Z变换与离散时间系统分析

- 1. Z变换的定义
- 2. Z变换的收敛域
- 3. Z变换的性质
- 4. 逆Z变换
- 5. LSI系统的转移函数
- 6. IIR系统的信号流图
- 7. Z变换求解差分方程

1. Z变换的定义

- Z变换在离散系统中的作用就像拉普拉斯变换在连续系统中的作用一样
  - 拉普拉斯变换把时域中的微分方程变成复频域中的代数方程, 可以看成是傅里叶变换的推广
  - Z变换把离散时间域的差分方程变成代数方程,可以看成是离散傅里叶变换的推广

1. Z变换的定义

- 从连续到离散
  - 考虑离散序列的拉普拉斯变换

$$X(s)=\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}}x(nT_s)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_n x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right)e^{-st}dt$$

$$=\sum_n x(nT_s)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)e^{-st}dt=\boxed{\sum_n}x(nT_s)e^{-snT_s}$$

如果令 $\boxed{z=e^{sT_s}}$ (用一个复变量代替另一个复变量)

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

能否看成信号分解?或者是空间变换，或者在某个空间的投影?展开?

1. Z变换的定义

- Z变换,拉普拉斯变换,傅里叶变换的联系

$$\boxed{z = e^{sT_s},}$$

$s = \sigma + j\Omega$, 其中$\Omega = 2\pi f$是连续角频率

$$z = e^{sT_s} = e^{(\sigma + j\Omega)T_s} = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega T_s}$$

令$r = e^{\sigma T_s}, \omega = \Omega T_s$,则

$$\boxed{z = re^{j\omega}}$$

Z实际上是由r和ω共同组成的,可以用极坐标形式表示

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) \left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \left(x(n) r^{-n}\right) e^{-j\omega n}$$

一个序列的Z变换,又可以看成是该序列乘以一个实加权序列r^(-n)后的傅里叶变换

1. Z变换的定义

- Z变换,拉普拉斯变换,傅里叶变换的联系

$$s = \sigma + j\Omega, \quad z = e^{sT_s} = re^{j\omega}$$

1)s平面上的复变量s是直角坐标,而z平面上的z一般取极坐标形式

2)当$\sigma = 0$时,$r = 1$.表示s平面上的$j\Omega$轴对应z平面的单位圆, 此时变成傅里叶变换

3)$\sigma < 0$表示s平面的左半平面,对应$r < 1$,是z平面的单位圆内,反之单位圆外

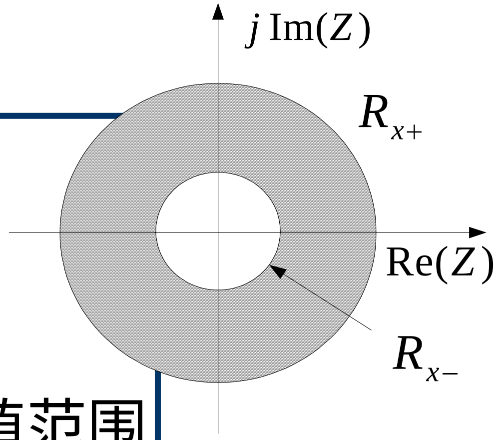
4) $\omega = 2\pi fT_s = \Omega T_s = 2\pi f / f_s = 2\pi f'$

第二部分
Z变换与离散时间系统分析

- 1. Z变换的定义
- 2. Z变换的收敛域
- 3. Z变换的性质
- 4. 逆Z变换
- 5. LSI系统的转移函数
- 6. IIR系统的信号流图
- 7. Z变换求解差分方程

2. Z变换的收敛域

- 一个序列的Z变换,又可以看成是该序列乘以一个实加权序列r^(-n)后的傅里叶变换
  - 加权序列r^(-n)满足什么条件,对应的傅里叶变换存在,即z变换存在
  - 使z变换收敛的z的取值集合称为X(z)的收敛域(Region of Convergence, ROC)



级数收敛充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| \le \sum_{-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|\left|z\right|^{-n} < \infty$$

即在$x(n)$序列有界的条件下限制$|z|$的取值范围

如: $R_- < |z| < R_+$

收敛半径

2. Z变换的收敛域

例1．指数序列（右边）

$x[n] = a^n u[n]$

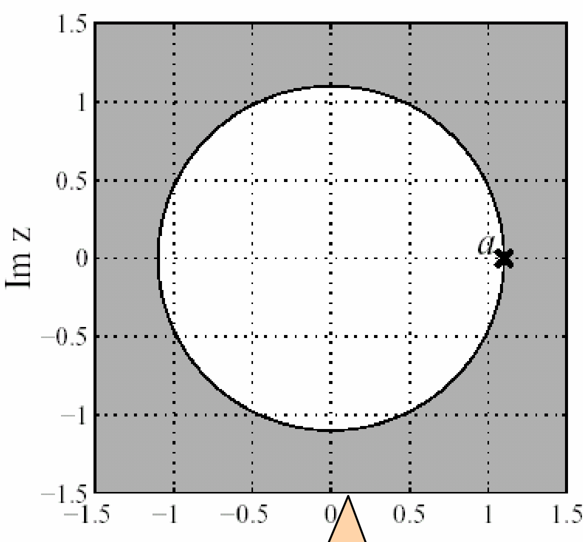
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

ROC : $\left|az^{-1}\right| < 1,$

i.e. $|z| > |a|$时，级数收敛

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$



$ROC : |z| > |a|$

2. Z变换的收敛域

例2. 左边序列：$x[n] = -a^n u[-n-1]$

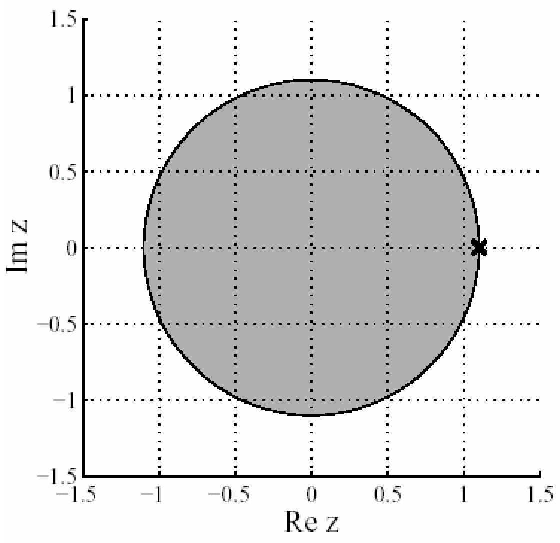
ROC：$\left|a^{-1}z\right| < 1$,

i.e. $|z| < |a|$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \qquad \text{令} m = -n$$

$$X(z) = \sum_{m=1}^{\infty} -\left(a^{-1}z\right)^m$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^n$$



$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}.$$

相同的Z变换，不同收敛域，对应不同的序列

一定要标注收敛域！

2. Z变换的收敛域

考虑一般离散序列的情况,即设$x(n)$在$N_1 \sim N_2$内有非零值,则

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n}$$

根据N_1和N_2的不同可以分四种情况

有限长右序列: $N_1 \geq 0$且$N_2 < \infty$

有限长左序列: $N_1 > -\infty$且$N_2 < 0$

因果序列:$N_1 \geq 0$且$N_2 = \infty$;

非因果序列:$N_1 < 0$且$N_2 = -\infty$;

实际上是以n=0为分界点,想想为什么?

任意有限长序列,左边序列,右边序列,双边序列均可以由这四种序列构造

2. Z变换的收敛域

- 有限长右序列 $N_1 \geq 0$且$N_2 < \infty$

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n}$$

$$=\underbrace{x(N_1)z^{-N_1}+x(N_1+1)z^{-N_1-1}+\cdots+x(N_2-1)z^{-N_2+1}+x(N_2)z^{-N_2}}_{\text{有限长序列之和,且Z的所有指数均为负整数}}$$

所以收敛域为$|z|>0$

- 有限长左序列 $N_1 > -\infty$且$N_2 < 0$

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n}$$

$$=\underbrace{x(N_1)z^{-N_1}+x(N_1+1)z^{-N_1-1}+\cdots+x(N_2-1)z^{-N_2+1}+x(N_2)z^{-N_2}}_{\text{有限长序列之和,且Z的所有指数均为正整数}}$$

所以收敛域为$|z|<\infty$

2. Z变换的收敛域

- 因果序列 $N_1 \geq 0$且$N_2 = \infty$;

设$|z|=R_-$时收敛,即

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)| R_-^{-n} < \infty$$

则当$|z|>R_-$时有$|z|^{-n} < R_-^{-n}, (n > 0)$

$$\left|\sum_{n=N_1}^{\infty} x(n) z^{-n}\right| \leq \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)||z|^{-n} < \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)| R_-^{-n} < \infty$$

故$|z|>R_-$也收敛,说明因果序列的收敛域为某个半径为R_-的圆外部分

- 非因果序列 $N_1<0$且$N_2 = -\infty$;

同理可以得到非因果序列的收敛域为某个半径为R_+的圆内部分

即$|z|<R_+$

2. Z变换的收敛域

- 归纳
  - 有限长右序列收敛域为 $|z|>0$
  - 有限长左序列收敛域为 $|z|<\infty$
  - 因果序列的收敛域为 $|z|>R_-$
  - 非因果序列的收敛域为 $|z|<R_+$
- 推广到其他序列
  - 双边无限长序列为因果序列和非因果序列之和,故收敛域为 $R_-<|z|<R_+$
  - 双边有限长序列为有限长右序列和有限长左序列之和,故收敛域为 $0<|z|<\infty$
  - 左有限右无限序列($N_1<0;N_2=\infty$): $R_-<|z|<\infty$
  - 右有限左无限序列($N_2>0;N_1=-\infty$): $0<|z|<R_+$

第二部分
Z变换与离散时间系统分析

- 1. Z变换的定义
- 2. Z变换的收敛域
- 3. Z变换的性质
- 4. 逆Z变换
- 5. LSI系统的转移函数
- 6. IIR系统的信号流图
- 7. Z变换求解差分方程

3. Z变换的性质

- 线性

若 $Z[x(n)] = X(z) \qquad (R_{x-} < |z| < R_{x+})$

$Z[y(n)] = Y(z) \qquad (R_{y-} < |z| < R_{y+})$

则 $Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \qquad (R_{-} < |z| < R_{+})$

ROC：一般情况下，取二者的重叠部分

即 $\max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$

某些线性组合中某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大。

3. Z变换的性质

- 时移性质 (非常重要, 联想差分方程)

若序列 $x(n)$的 z 变换为 $Z[x(n)] = X(z)$, 则其移位后的 z 变换为 $Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)$

收敛域：只会影响 $z=0, z=\infty$ 处（因为可能会跨越0点）

实际工作中遇到的信号大都是因果信号,故向右移位的形式最常用

$$Z[x(n-k)] = z^{-k} X(z)$$

3. Z变换的性质

序列的指数加权性质

若 $Z[x(n)] = X(z)$ $\quad (R_{x-} < |z| < R_{x+})$

则 $a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$ $\quad \left(R_{x-} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x+}\right)$ $\quad a$为非零常数

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

序列的线性加权性质

若 $Z[x(n)] = X(z)$

则 $nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dz}[z^{-n}]$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n}$$

$$= -z^{-1}ZT[nx(n)]$$

$$ZT[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

3. Z变换的性质

复序列的共轭

$$Z\left[x^*(n)\right]=X^*(z^*)$$

$X(z)$的$ROC: R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$X^*(z^*)$的$ROC: R_{x-}\le|z|<R_{x+}$

$$Z\left[x^*(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)z^{-n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^*)^{-n}\right]^*=X^*(z^*)$$

初值定理

若 $x(n)$为因果序列，已知 $X(z)=Z\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$,

则 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=x(0)$$

3. Z变换的性质

时域卷积性质

已知 $X(z)=Z\left[x(n)\right] \qquad \left(R_{x-}<|z|<R_{x+}\right)$

$Y(z)=Z\left[y(n)\right] \qquad \left(R_{y-}<|z|<R_{y+}\right)$

则 $Z\left[x(n)*y(n)\right]=X(z)Y(z)$

ROC：一般情况下，取二者的重叠部分

即 $\max(R_{x-},R_{y-})<|z|<\min(R_{x+},R_{y+})$

证明:

$$Z\left[x(n)*y(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)\right]z^{-n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-k)z^{-(n-k)}=X(z)Y(z)$$

看看还有哪些变换满足这一性质?时域卷积,对应变换域的……

第二部分
Z变换与离散时间系统分析

- 1. Z变换的定义
- 2. Z变换的收敛域
- 3. Z变换的性质
- 4. 逆Z变换
- 5. LSI系统的转移函数
- 6. IIR系统的信号流图
- 7. Z变换求解差分方程

4.逆Z变换

- 幂级数法

如果我们能把$X(z)$表达成一个幂级数的形式

$$X(z) = \ldots a_{-2}z^{2} + a_{-1}z^{1} + a_{0}z^{0} + a_{1}z^{-1} + a_{2}z^{-2} + \cdots$$

则显然该级数的系数就是$x(n)$

方法:把$X(z)$表示成有理分式$X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$形式,用长除法

要注意Z的幂顺序,先根据收敛域判断序列的左\右性,再决定Z的幂是按升幂还是降幂排列

4.逆Z变换

已知 $X(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+1}$ $\quad |z|>1$，求 $x(n)$。

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\cdots \\
\hline
z^2-2z+1 & z \\
 & z-2+z^{-1} \\
\hline
 & 2-z^{-1} \\
 & 2-4z^{-1}+2z^{-2} \\
\hline
 & 3z^{-1}-2z^{-2} \\
 & 3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3} \\
\hline
 & 4z^{-2}-3z^{-3} \\
 & 4z^{-2}-8z^{-3}+4z^{-4} \\
\hline
 & 5z^{-3}-4z^{-4}
\end{array}
$$

因为 $X(z)=x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$

所以 $x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$

因为长除结果无常数项，则$x(0)=0$。

4.逆Z变换

$$X(z)=\frac{z}{z^2-2z+1}=\frac{z}{1-2z+z^2}\qquad |z|<1$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots \\
\hline
1-2z+z^2 & z \\
 & z-2z^2+z^3 \\
 & \overline{2z^2-z^3} \\
 & 2z^2-4z^3+2z^4 \\
 & \overline{3z^3-2z^4} \\
 & 3z^3-6z^4+3z^5 \\
 & \overline{4z^4-3z^5} \\
 & 4z^4-8z^5+4z^6 \\
 & \overline{5z^5-4z^6}
\end{array}$$

所以 $x(n)=\left\{\cdots,\ 4,\ 3,\ 2,\ \underset{n=-1}{\underset{\uparrow}{1}}\right\}$

4.逆Z变换

- 部分分式法
  - 思路:利用一些典型序列的Z变换结果以及Z变换的线性性质，即将X(z)分解成简单的Z函数之和的形式，每个Z函数都可以直接得到原序列
  - 简单的z函数和原序列

1	$\delta(n)$	
$\frac{1}{z}=z^{-1}$	$\delta(n-1)$	$\lvert z\rvert>0$
$\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$	$a^{n}u(n)$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^{2}}=\frac{az}{\left(z-a\right)^{2}}$	$na^{n}u(n)$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

……

4.逆Z变换

- 部分分式法
  - 方法:先将X(z)/z展成部分分式之和, 然后把各个部分分式乘以z,再根据简单z函数逆变换求出X(z)对应的原序列

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Mz^{-M}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Nz^{-N}}$$

对因果序列，为了保证 $z=\infty$处收敛，其分子多项式的阶次不能大于分母多项式的阶次,即必须满足 $N\geq M$。

4.逆Z变换

例: $X(z)=\dfrac{2z^2}{(z+1)(z+2)^2}$, ROC: $|z|>2$, 求$x(n)$

解:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z}{(z+1)(z+2)^2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{(z+2)^2}$$

显然

$$A=(z+1)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=-1}=-2$$

$$B=\frac{d}{dz}\left[(z+2)\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=-2}=2$$

$$C=(z+2)^2\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=-2}=4$$

所以 $X(z)=\dfrac{-2z}{z+1}+\dfrac{2z}{z+2}+\dfrac{4z}{(z+2)^2}$

因此 $x(n)=\left[-2(-1)^n+2(-2)^n+n(-2)^{n+1}\right]u(n)$

4.逆Z变换

- 留数法

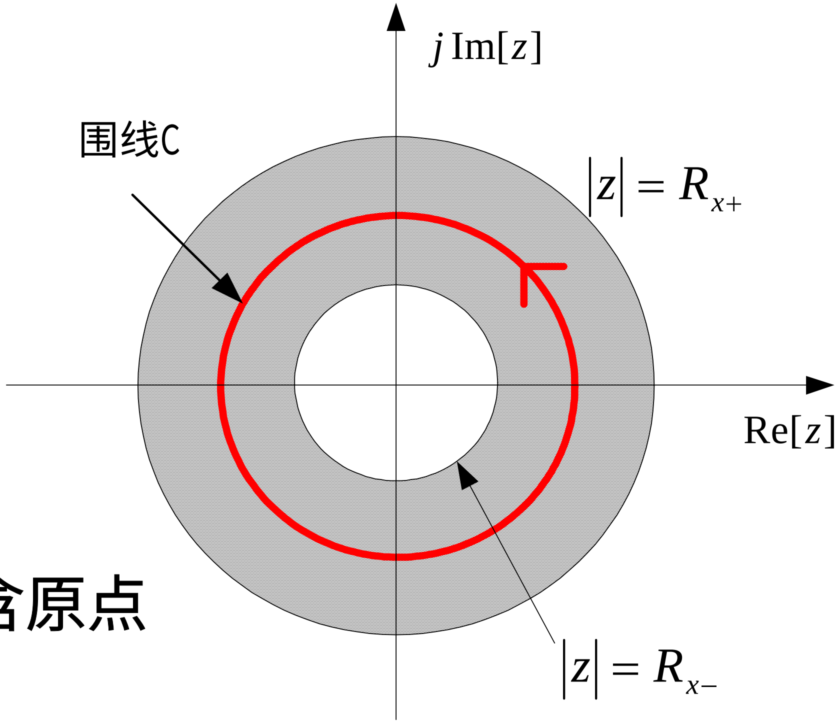
  已知z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

  得 z 逆变换公式

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

C:在收敛域内包含原点的任意封闭曲线



用留数定理求围线积分。

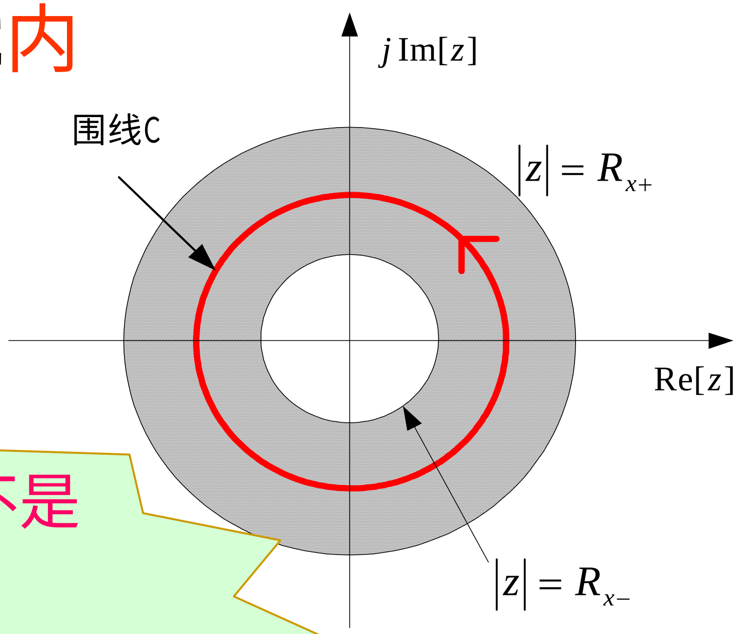
在z平面上的X(z)收敛域中，沿包含原点的任意封闭曲线c的反时针方向对$x(z)z^{n-1}$进行围线积分

4.逆Z变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\,dz$$

围线积分等于 $X(z)z^{n-1}$ 在围线C内所有极点上的留数之和

$$\boxed{x(n)=\sum_K \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]\Big|_{z=z_k}}$$



1. 极点为 $X(z)z^{n-1}$ 的极点，不是 $X(z)$ 的极点
2. 计算在围线c以内的极点上的留数
3. 特别注意在 $z=0$ 处的极点

- **留数的求法：**

首先将 $X(z)Z^{n-1}$写成 z的有理分式的形式

$$X(z)Z^{n-1}=\frac{\psi(z)}{(z-z_k)^s},$$ 且 $\psi(z)$中已没有 $z=z_k$处的极点

单阶极点(s=1)

$$\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=z_k}=\left[(z-z_k)X(z)z^{n-1}\right]\Big|_{z=z_k}=\psi(z_k)$$

s重极点

$$\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]\Big|_{z=z_k}=\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s-1}}{\mathrm{d}z^{s-1}}\psi(z)\right\}_{z=z_k}$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s-1}}{\mathrm{d}z^{s-1}}(z-z_k)^s X(z)z^{n-1}\right\}_{z=z_k}$$

4.逆Z变换

- 留数法求逆z变换步骤

1.计算$X(z)z^{n-1}$

2.求各种n的取值情况下，$X(z)z^{n-1}$的极点，

检查极点是否在收敛域内的积分围线内；

3.对围线内的极点，求其留数，用留数定理计算z反变换

1. 极点为 $X(z)z^{n-1}$ 的极点，不是 $X(z)$ 的极点
2. 计算在围线c以内的极点上的留数
3. 特别注意在 $z=0$ 处的极点

例1(补充)

已知$X(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}, |z|>1$,求其反变换。

$$\frac{Z^{n-1}}{(Z-1)^2}$$

解答

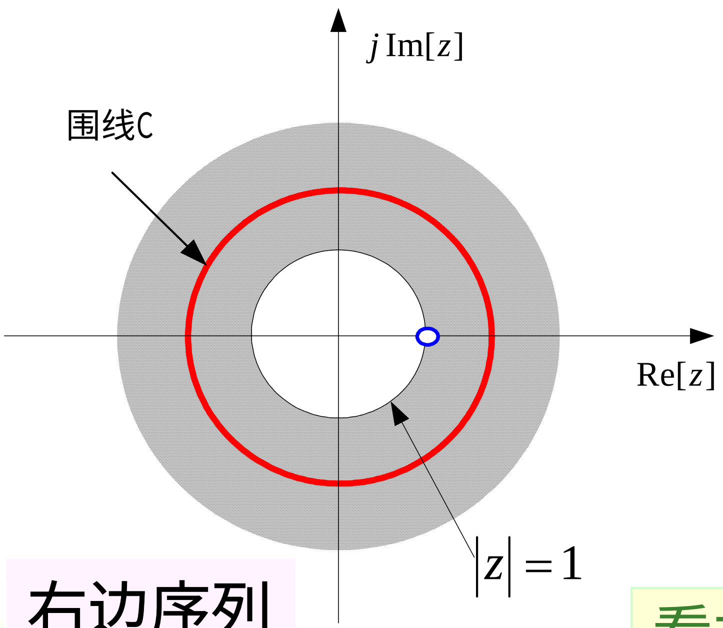
$(1)n\geq 1$　　$X(z)z^{n-1}$有一个二阶极点 $P_{1,2}=1$

$$Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=1}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2}z^{n-1}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{d}{dz}\left(z^{n-1}\right)\Big|_{z=1}$$

$$=(n-1)z^{n-2}\Big|_{z=1}=(n-1)$$

$$\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]\Big|_{Z=1}=(n-1)u(n-1)$$



右边序列

看极点是否在围线内

(2)$n=0$

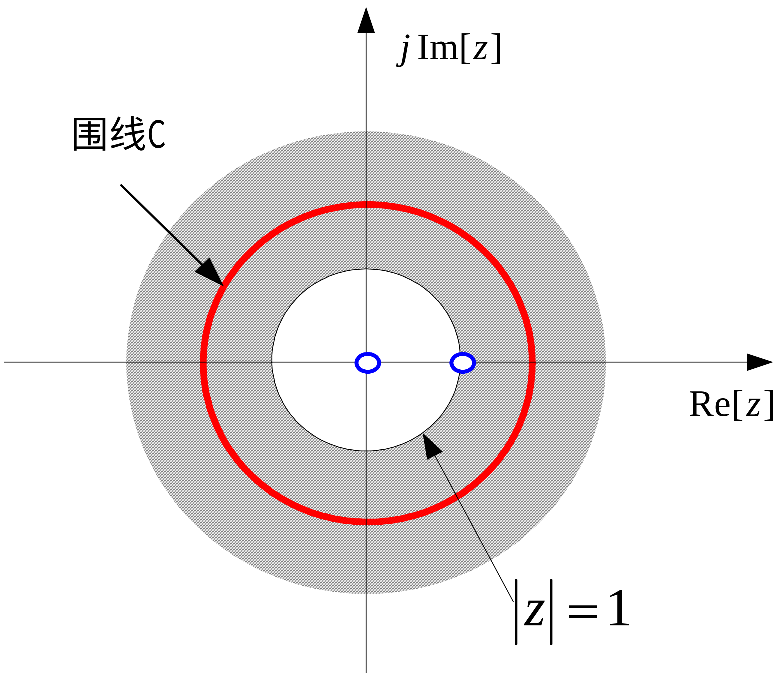
$$X(z)z^{n-1}=\frac{1}{z(z-1)^2}$$

$$\frac{Z^{n-1}}{(Z-1)^2}$$

一个二阶极点 $P_{1,2}=1$, 又多了一个单极点 $P_1=0$

$$Res\left[\frac{1}{z(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=0}=\left[z\cdot\frac{1}{z(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$=1$$



$$Res\left[\frac{1}{z(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=1} = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\cdot\frac{1}{z(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=1} = \frac{-1}{z^2}\Bigg|_{z=1} = -1$$

所以 $x(0)=1+(-1)=0$

$$\frac{Z^{n-1}}{(Z-1)^2}$$

(3) $n<0$

$$X(z)z^{n-1} = \frac{1}{z^{-n+1}(z-1)^2}$$

一个二阶极点 $P_{1,2}=1$, 又多了一个$(-n+1)$极点 $P_1=0$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^{-n+1}(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\cdot\frac{1}{z^{-n+1}(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$=(n-1)z^{n-2}\Big|_{z=1} = n-1$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^{-n+1}(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=0}=\frac{1}{(-n)!}\frac{d^{-n}}{dz^{-n}}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$=(-1)^{-n}(-n+1)(z-1)^{n-2}\Big|_{z=0}=-n+1$$

$n<0$时，$x(n)=0$

$n=0$时，$x(n)=0$

$n>0$时,$x(n)=(n-1)u(n-1)$

$$x(n)=(n-1)u(n-1)$$

此例中，由收敛域可见**x(n)**是右边序列，可知在**n<1**左边**X(n)=0**

第二部分
Z变换与离散时间系统分析

- 1. Z变换的定义
- 2. Z变换的收敛域
- 3. Z变换的性质
- 4. 逆Z变换
- 5. LSI系统的转移函数
- 6. IIR系统的信号流图
- 7. Z变换求解差分方程

5.LSI系统的转移函数

- 对于一个LSI系统,已经有5种方式来描述
  - 单位抽样响应 $h(n)$
  - 卷积关系 $$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n)h(n-k)=x(n)*h(n)$$
  - 频率响应 $$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$
  - 转移函数 $$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$
  - 差分方程 $$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a(k)y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b(r)x(n-r)$$

5.LSI系统的转移函数

- 考虑差分方程

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a(k)y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b(r)x(n-r)$$

两边取z变换

$$Y(z)=-\sum_{k=1}^{N}a(k)Y(z)z^{-k}+\sum_{r=0}^{M}b(r)X(z)z^{-r}$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N}a(k)z^{-k}=X(z)\sum_{r=0}^{M}b(r)z^{-r}\text{,其中}a(0)=1$$

由于卷积性质$Y(z)=X(z)H(z)$,故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b(r)z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N}a(k)z^{-k}}\text{,其中}a(0)=1$$

非常常用的形式,例如matlab中filter函数的参数

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

5.LSI系统的转移函数—极零分析

- LSI系统稳定性的重要结论
  - 一个LSI系统是稳定的充要条件是其所有极点都位于单位圆内

多种不同的表述方式

证明: $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ 可以进一步分解为

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{C_k z}{z-p_k},\quad 故h(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k p_k^n$$

又因为系统稳定充要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|<\infty$

$$故\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}C_k p_k^n\right|\le\sum_{k=1}^{N}|C_k|\sum_{n=0}^{\infty}|p_k^n|<\infty$$

第一项求和为有限项,第二项要小于∞,必须有

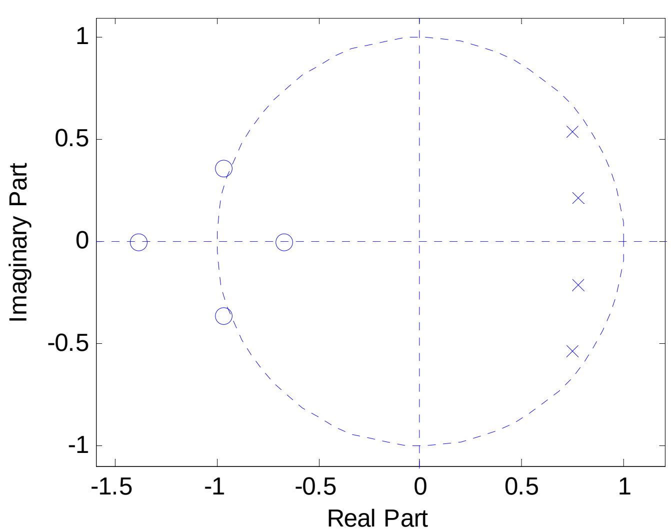
$$|p_k|<1,\qquad k=1,2,\cdots,N$$

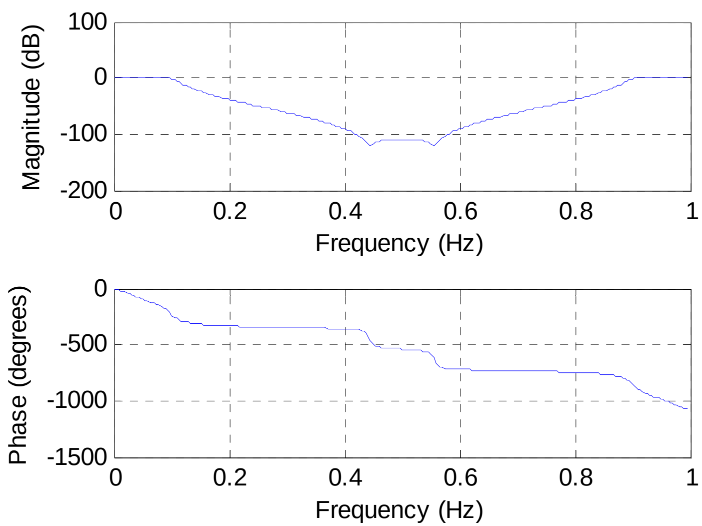
即每个极点都在单位圆内

5.LSI系统的转移函数—极零分析

- 由极零图估计系统的频率响应
  - 将H(z)的极点、零点画在z平面上得到的图形称为零极图
  - 由零极图可以大致估计出系统的频率响应，还可以得出滤波器设计的一般原则

$$H(z)=\frac{0.001836+0.007344z^{-1}+0.011016z^{-2}+0.007374z^{-3}+0.001836z^{-4}}{1-3.0544z^{-1}+3.8291z^{-2}-2.2925z^{-3}+0.55075z^{-4}}$$





5.LSI系统的转移函数—极零分析

- 由极零图估计系统的频率响应

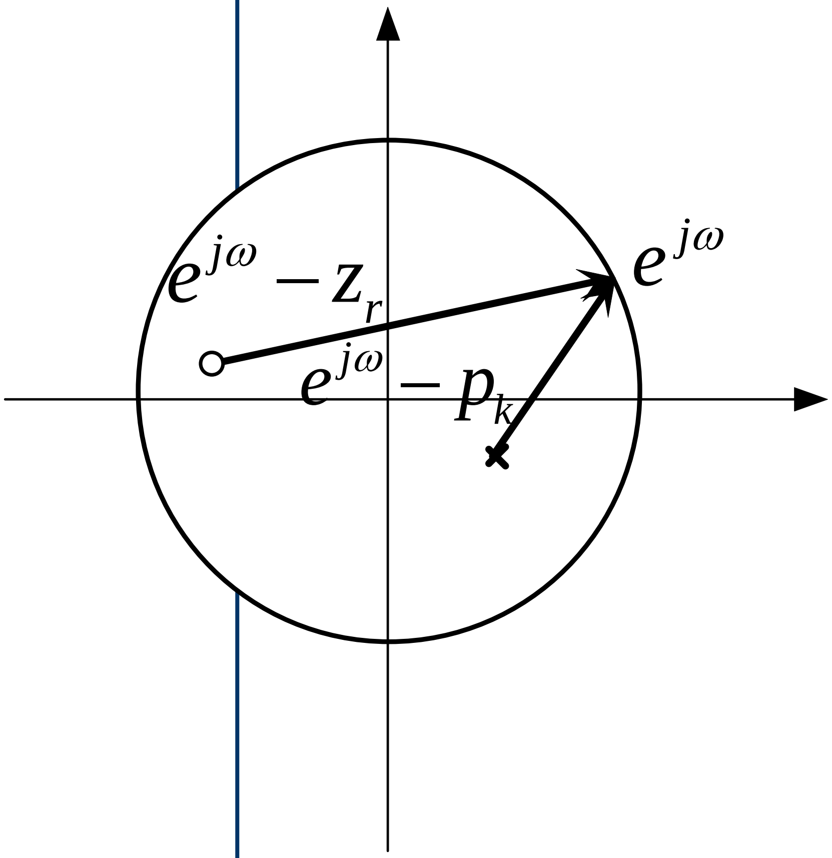
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b(r)z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N}a(k)z^{-k}}=gz^{N-M}\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

令$z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega})=ge^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}$$

幅频响应$\left|H(e^{j\omega})\right|=g\frac{\prod_{r=1}^{M}\left|e^{j\omega}-z_r\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega}-p_k\right|}$

$$\varphi(e^{j\omega})=\arg\left[e^{j(N-M)\omega}\right]+\sum_{r=1}^{M}\left[\arg(e^{j\omega}-z_r)\right]-\sum_{k=1}^{N}\left[\arg(e^{j\omega}-p_k)\right]$$



5.LSI系统的转移函数—极零分析

例：一个LSI系统的差分方程为

$$y(n)=x(n)-4x(n-1)+4x(n-2)$$

试用极零分析大致画出系统的幅频响应和相频响应

解：$H(z)=1-4z^{-1}+4z^{-2}=(z^2-4z+4)/z^2=(z-2)^2/z^2$

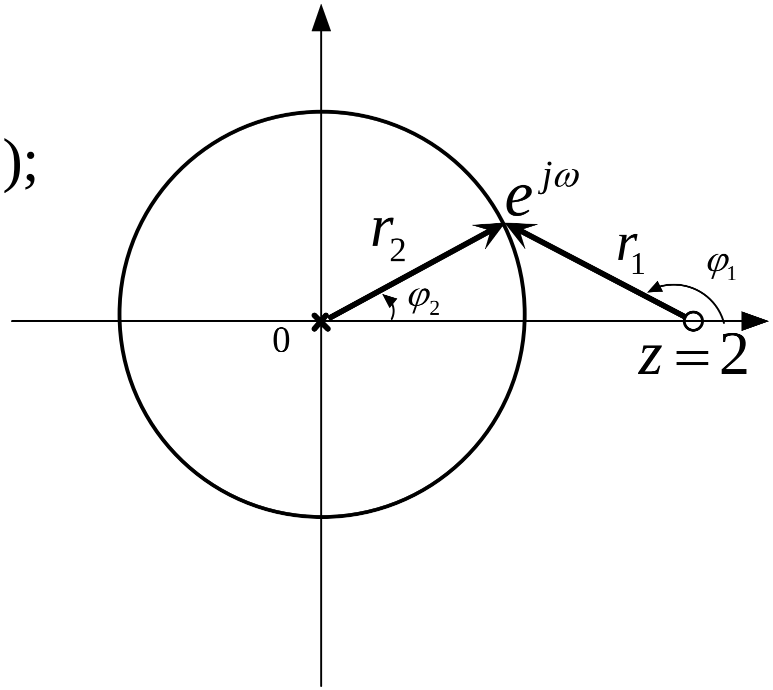
$r_1=\left|e^{j\omega}-2\right|;\quad r_2=\left|e^{j\omega}-0\right|=1;$

$\varphi_1=\arg(e^{j\omega}-2);\quad \varphi_2=\arg(e^{j\omega}-0)=\arg(e^{j\omega});$

因此$\left|H(e^{j\omega})\right|=r_1^{\,2};\quad \varphi(e^{j\omega})=2\varphi_1-2\varphi_2;$

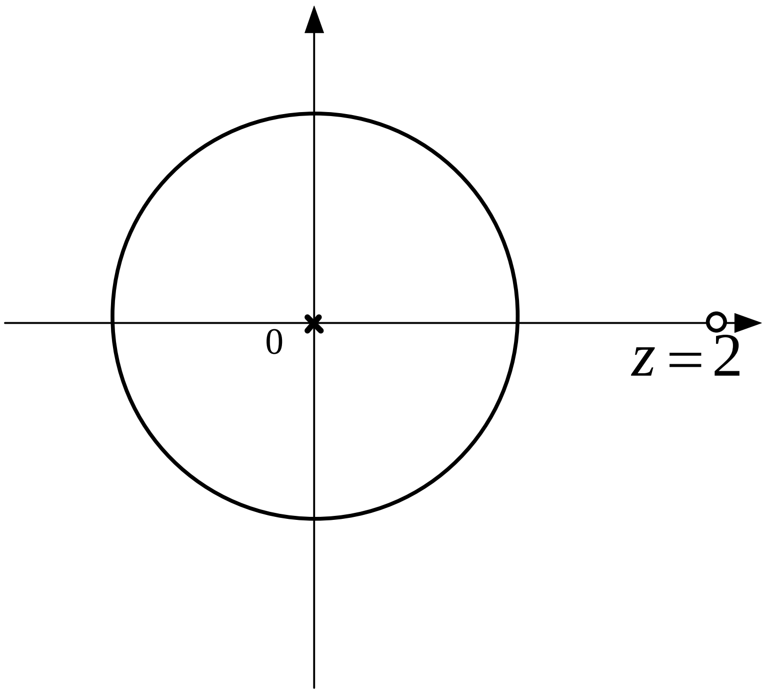
随着ω从0变化到π再到2π,分析$\left|H(e^{j\omega})\right|$

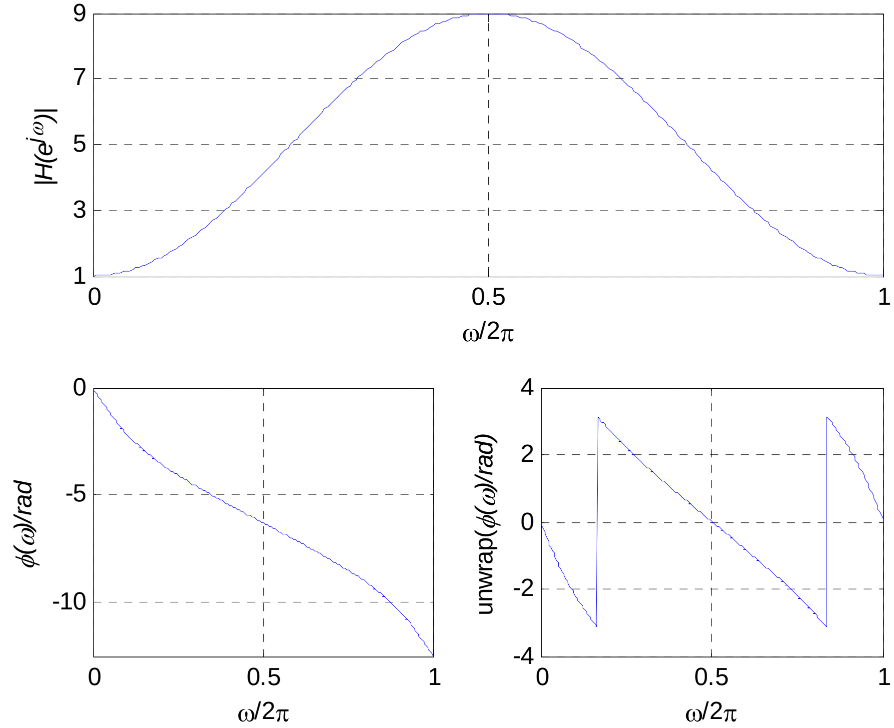
和$\varphi(e^{j\omega})$的变化规律



5.LSI系统的转移函数—极零分析

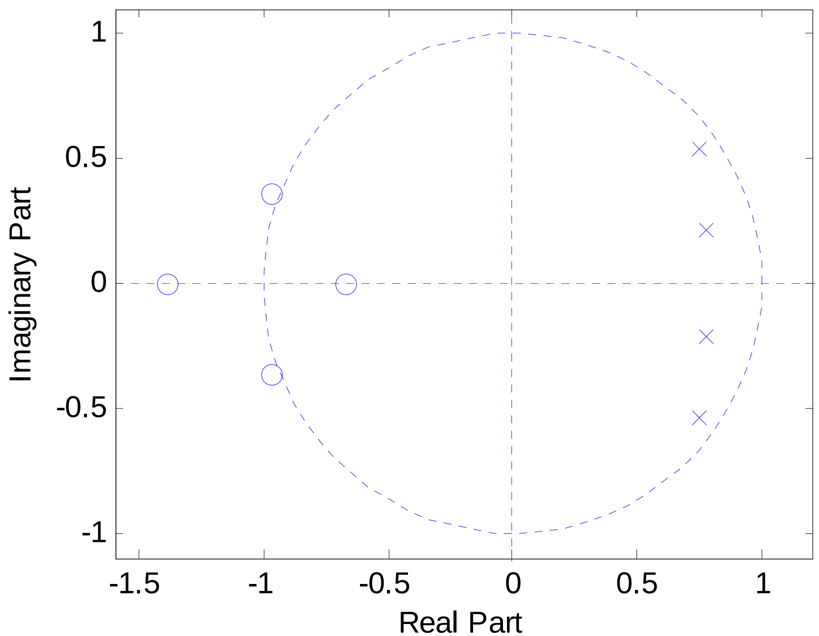
$$H(z)=(z-2)^2/z^2$$

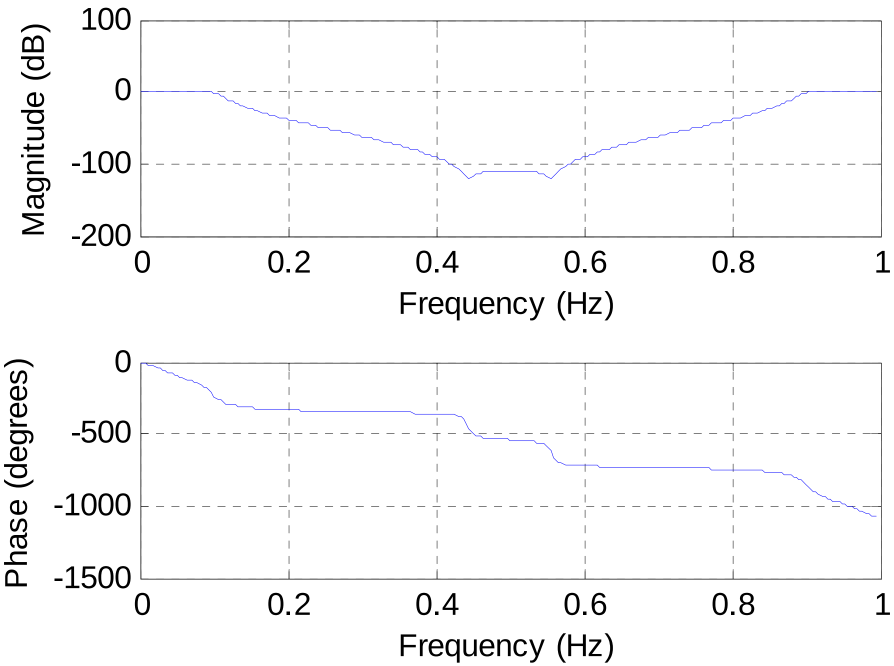




5.LSI系统的转移函数—极零分析

$$H(z)=\frac{0.001836+0.007344z^{-1}+0.011016z^{-2}+0.007374z^{-3}+0.001836z^{-4}}{1-3.0544z^{-1}+3.8291z^{-2}-2.2925z^{-3}+0.55075z^{-4}}$$





5.LSI系统的转移函数—滤波的基本概念

- 线性滤波器与LSI系统
  - 低通(LP, low-pass)
  - 高通(HP, high-pass)
  - 带通(BP, band-pass)
  - 带阻(BS, band-stop)
  - …

$H(e^{j\omega})$的零极点与滤波器的特性：$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

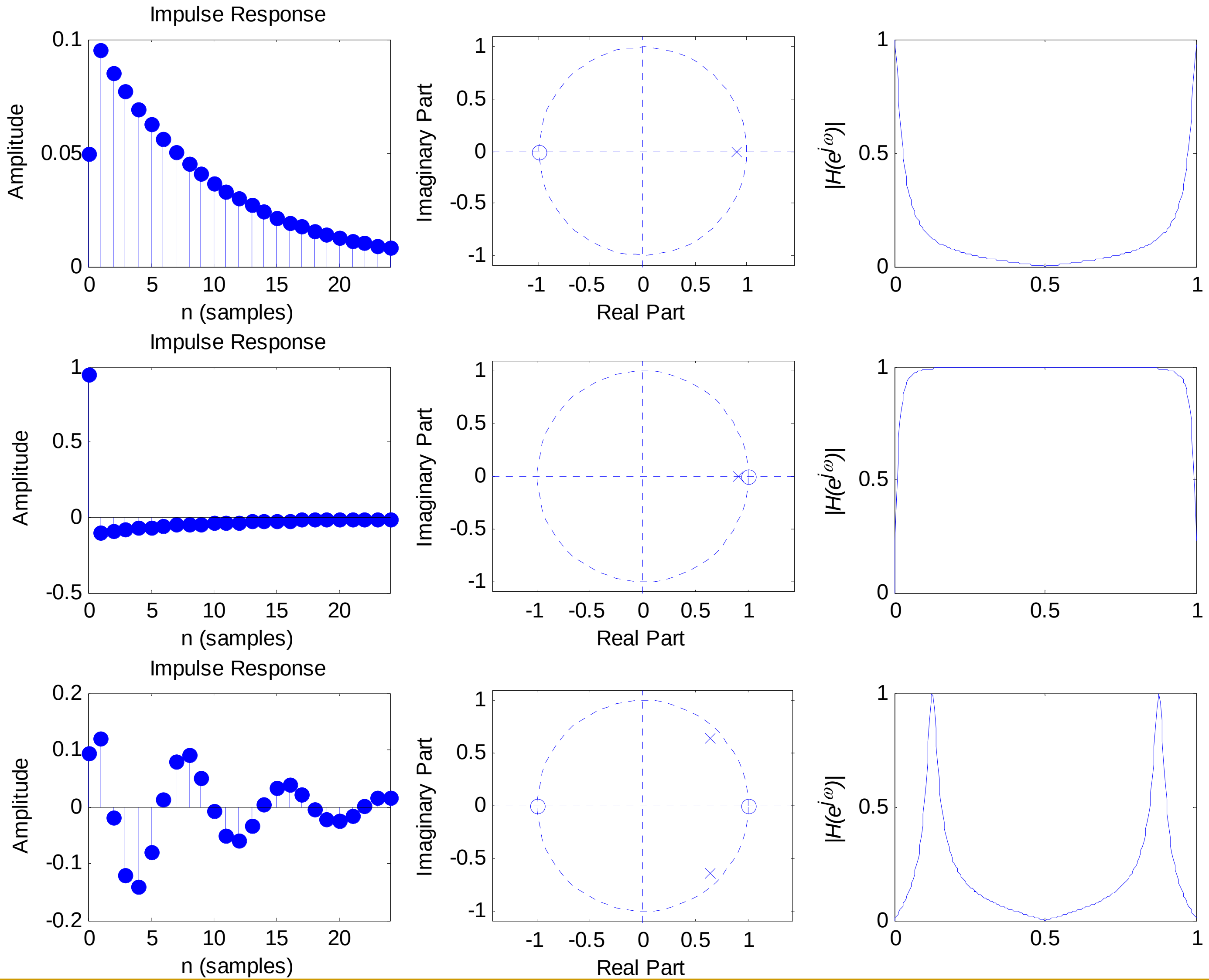
试分析:

$$H_0(e^{j\omega})=a\frac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}};\ H_1(e^{j\omega})=b\frac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}};\ H_2(e^{j\omega})=c\frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-re^{ja}z^{-1})(1-re^{-ja}z^{-1})};$$

$p=0.9, r=0.9, a=\pi/4$,常数a,b,c用来保证幅频响应最大值为1

$$H_0(e^{j\omega})=a\frac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}};\ H_1(e^{j\omega})=b\frac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}};\ H_2(e^{j\omega})=c\frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-re^{ja}z^{-1})(1-re^{-ja}z^{-1})};$$

$p=0.9, r=0.9, a=\pi/4,$ 常数a,b,c用来保证幅频响应最大值为1



5.LSI系统的转移函数—滤波的基本概念

- 滤波器设计的一般原则
  - 若使设计的滤波器拒绝某一个频率（即不让改频率的信号通过，或大幅度衰减），应在单位圆相应的频率处设置一个零点；反之，若使滤波器突出某一个频率（使该频率的信号尽量无衰减通过），应在单位圆内相应频率处设置一个极点。极点越接近单位圆，在该频率处幅频响应幅度越大，形状越尖。
  - 原点处的极、零点不影响幅频响应，仅影响相频响应
  - FIR滤波器为全零点系统，一定稳定
  - IIR滤波器为极零点系统，不一定稳定

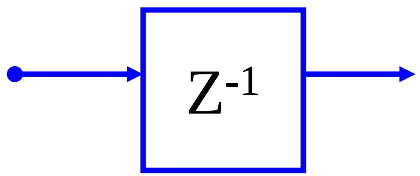
第二部分
Z变换与离散时间系统分析

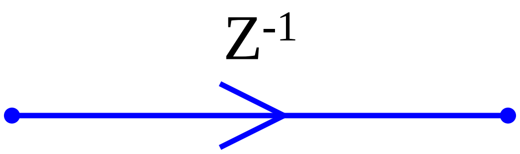
- 1. Z变换的定义
- 2. Z变换的收敛域
- 3. Z变换的性质
- 4. 逆Z变换
- 5. LSI系统的转移函数
- 6. IIR系统的信号流图
- 7. Z变换求解差分方程

6.IIR系统的信号流图

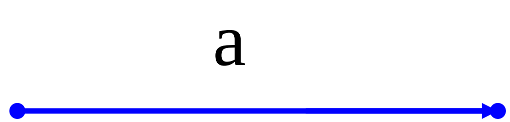
方框图表示法：　　　　信号流图表示法：

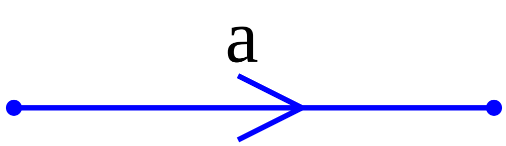
单位延时



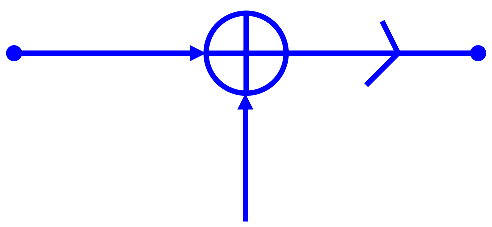


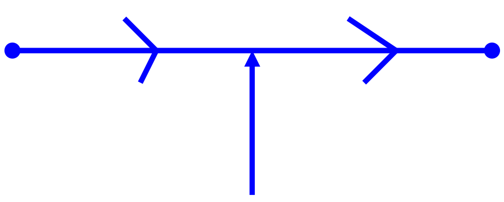
系数乘





相加





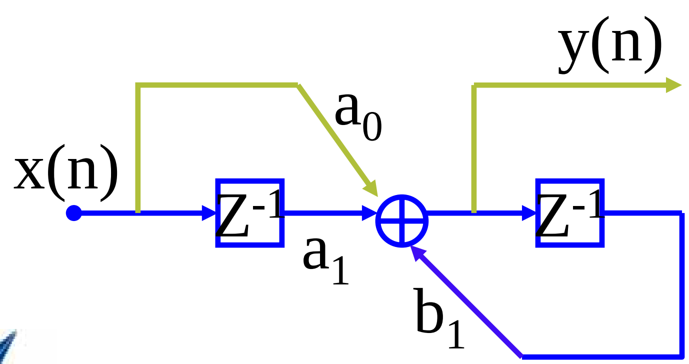
6.IIR系统的信号流图

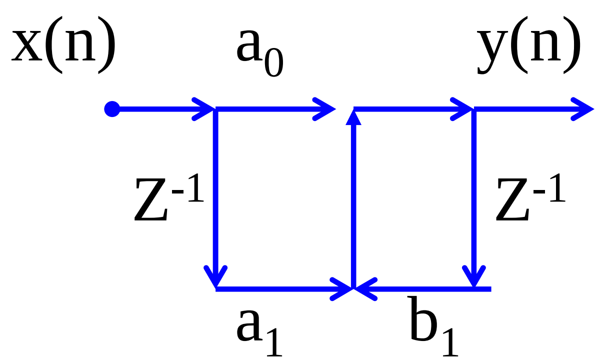
例1：一阶数字滤波器：

$$y(n)=a_0x(n)+a_1x(n-1)+b_1y(n-1)$$

$$Y(z)=a_0X(z)+a_1z^{-1}X(z)+b_1z^{-1}Y(z)$$

其方框图及流图结构如下：

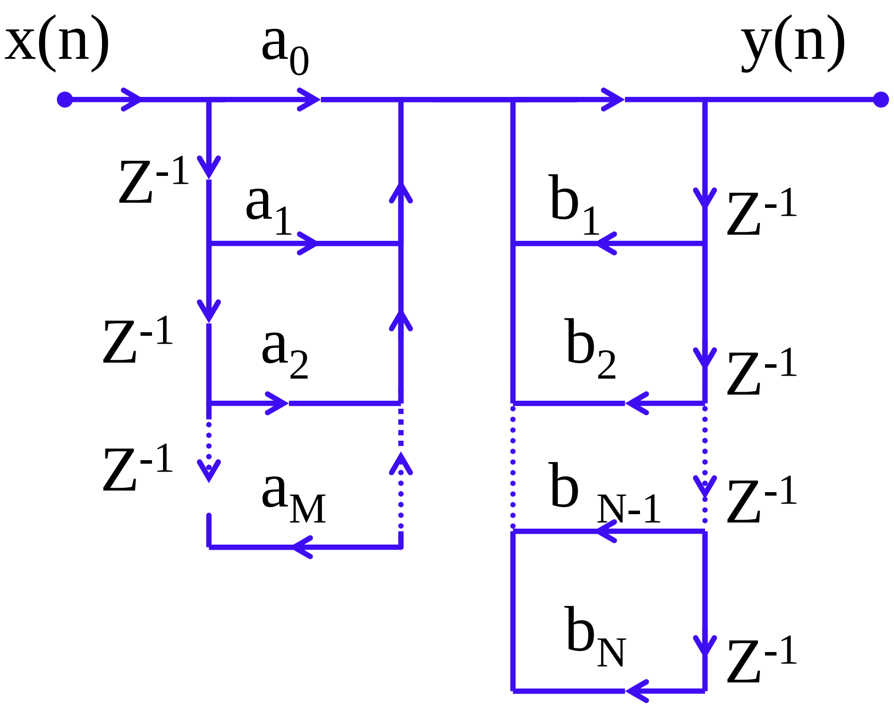




6.IIR系统的信号流图

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)+\sum_{i=0}^{M} a_i x(n-i)$$

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i Z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N} b_i Z^{-i}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$



此结构的特点为：

(1)两个网络级联：第一个横向结构M节延时网络实现零点，第二个有反馈的N节延时网络实现极点。

(2)共需(N+M)级延时单元

6.IIR系统的信号流图

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i Z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i Z^{-i}}=\left(\sum_{i=1}^{M}a_i z^{-i}\right)\left(\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}\right)=H_1(z)H_2(z)$$

$$H_1(z)=\sum_{i=1}^{M}a_i z^{-i},H_2(z)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}$$

$H_1(z)$只含有零点，仅有横向延迟，称为横向网络

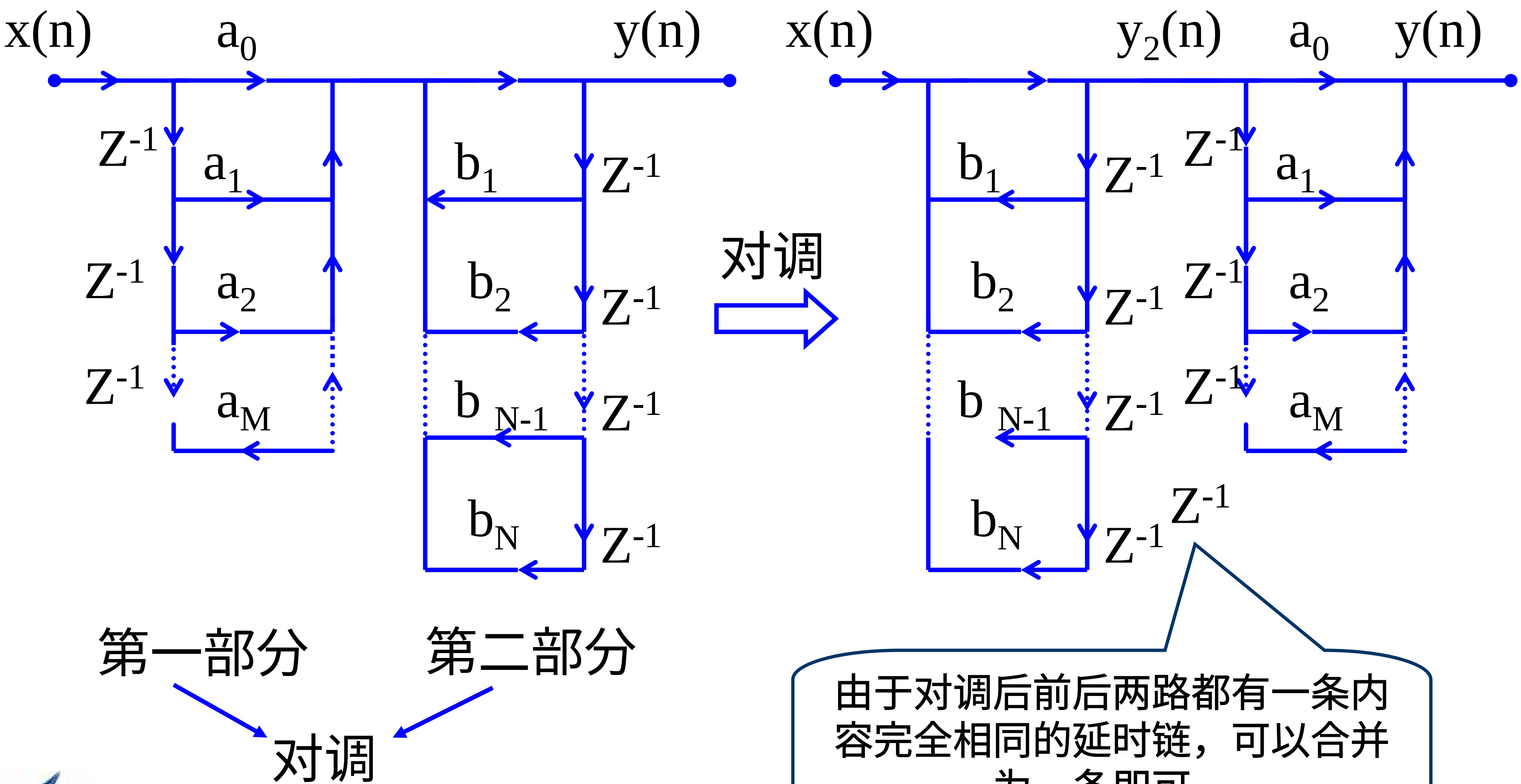
$H_2(z)$只含有极点，含有延迟反馈，称为反馈网络

信号流图转置定理：如果将信号流图中的所有支路倒向，然后将输入输出互换，则其系统函数不变

考虑：$H(z)=H_1(z)H_2(z)=H_2(z)H_1(z)$

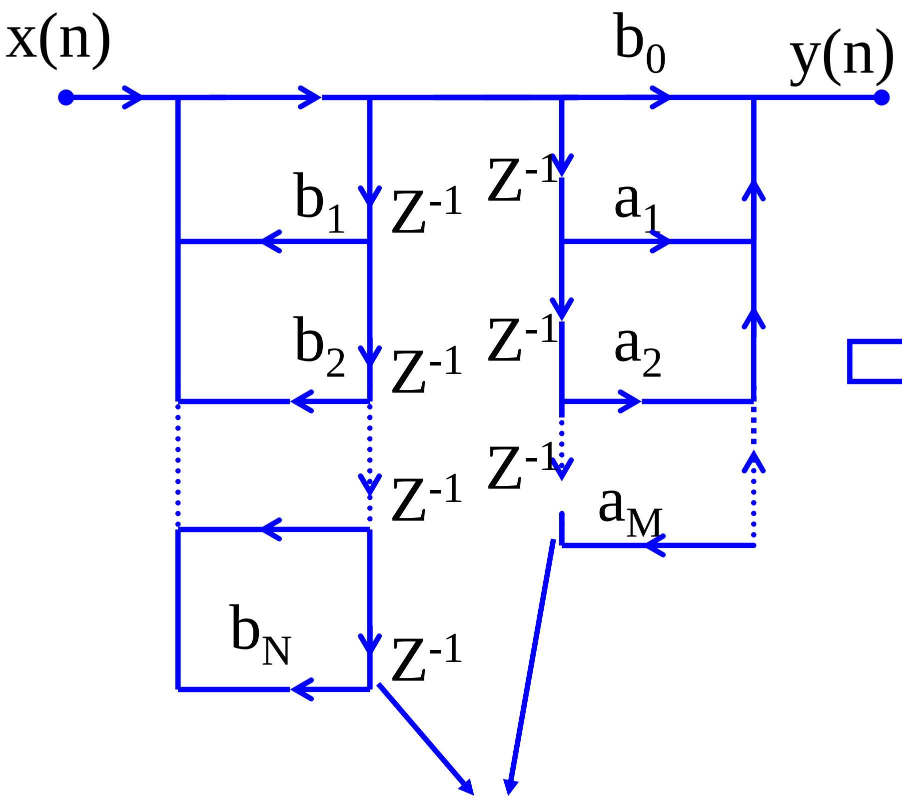
6.IIR系统的信号流图

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)=H_2(z)H_1(z)$$

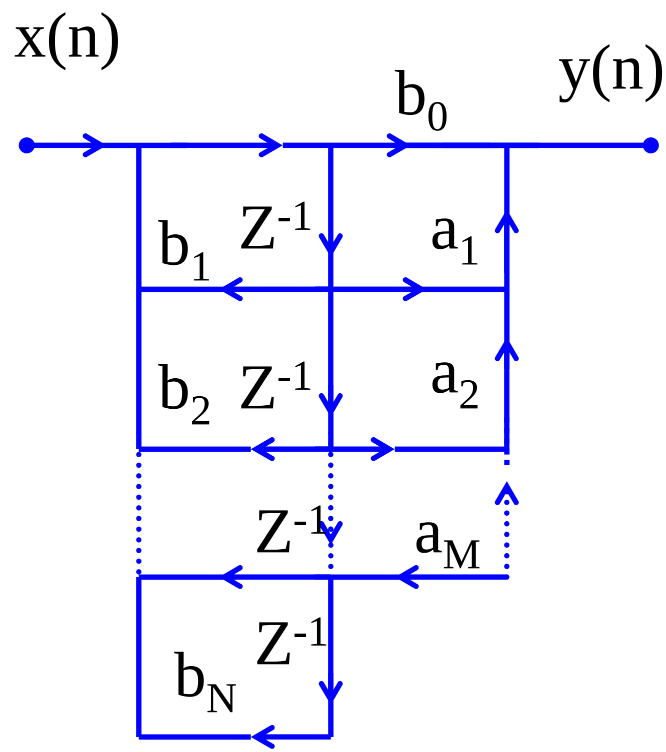


由于对调后前后两路都有一条内容完全相同的延时链，可以合并为一条即可。

6.IIR系统的信号流图—直接实现

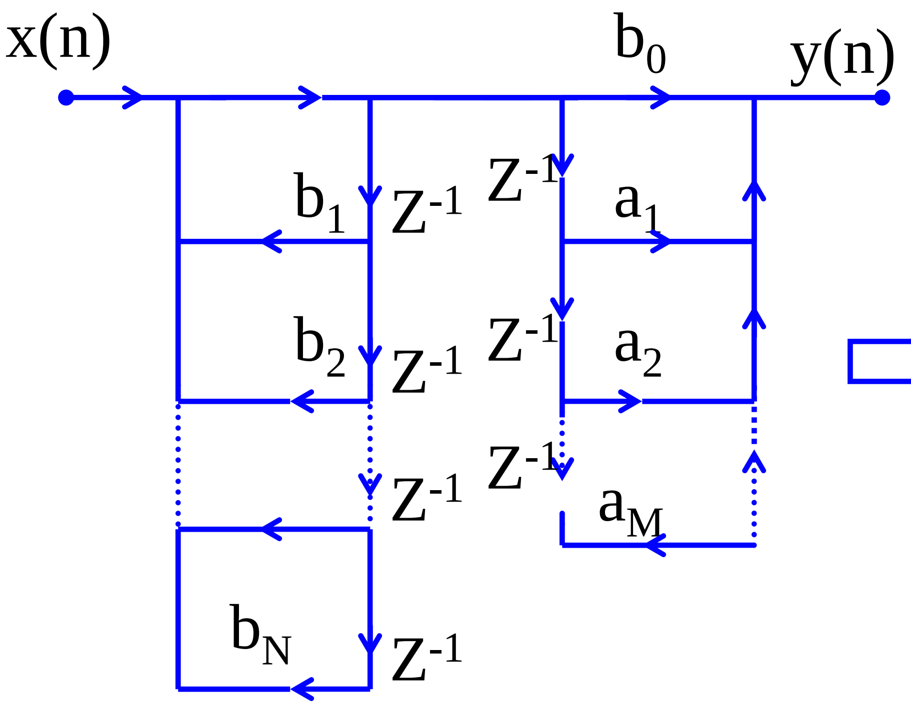


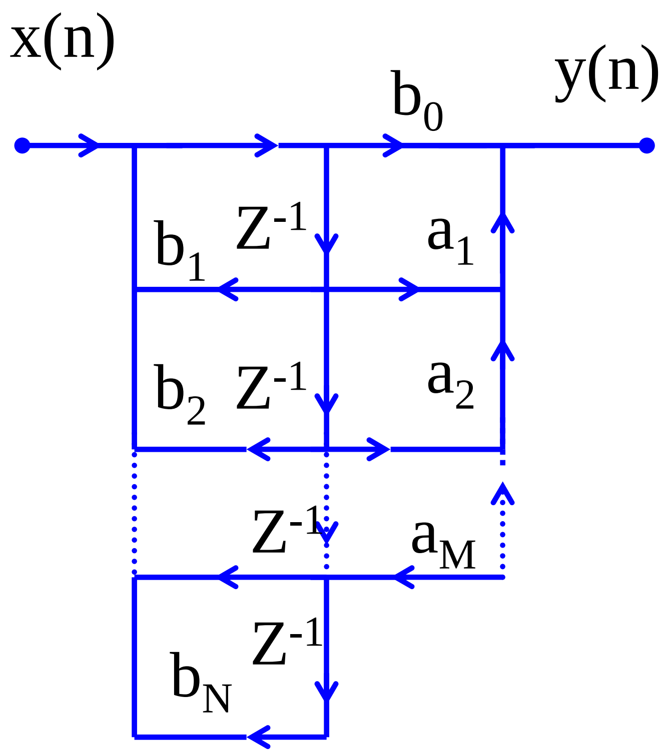
合并



直接实现的IIR结构流图

6.IIR系统的信号流图—直接实现





使用了N个延时单元，M+N个乘法器，2个加法器

任意*bi*的误差都会影响所有极值点，易造成系统不稳定

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i Z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N} b_i Z^{-i}}$$

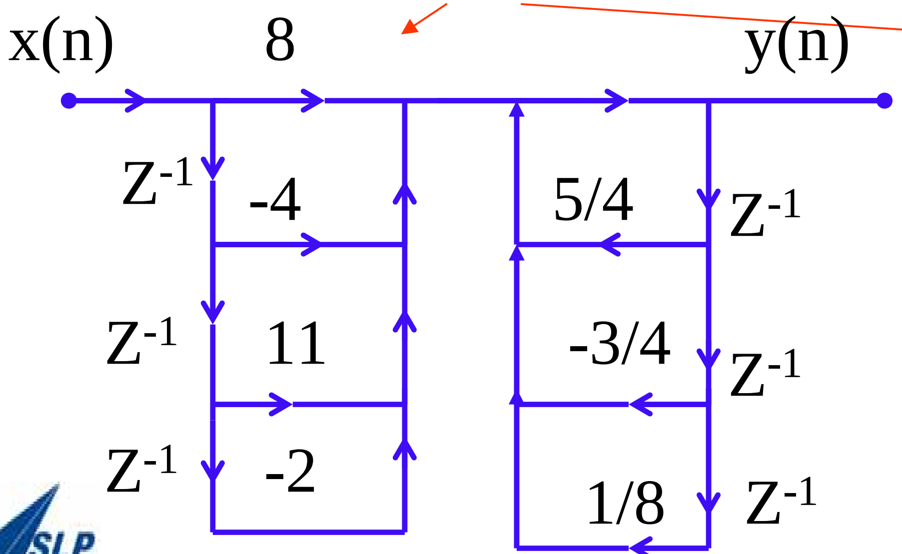
6.IIR系统的信号流图—直接实现

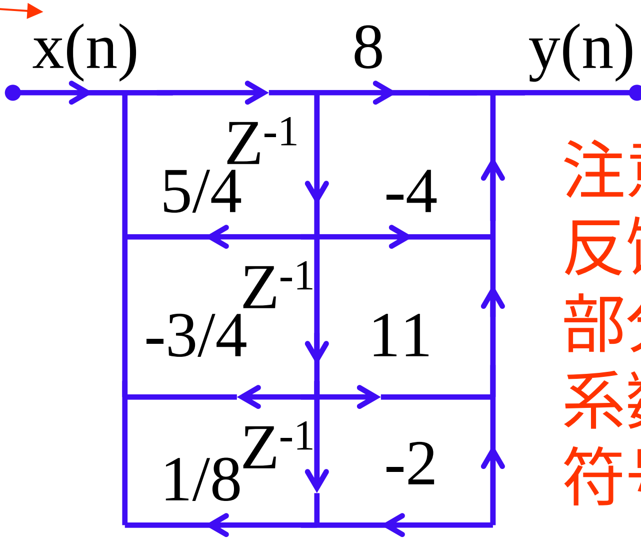
$$H(z)=\frac{8z^3-4z^2+11z-2}{(z-\frac{1}{4})(z^2-z+\frac{1}{2})}=\frac{8z^3-4z^2+11z-2}{z^3-\frac{5}{4}z^2+\frac{3}{4}z-\frac{1}{8}}$$

z^{-1}的有理分式

$$=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$$

解：为了得到直接I、II型结构，必须将H(z)代为Z^{-1}的有理式；





注意反馈部分系数符号

6.IIR系统的信号流图—级联实现

- IIR系统：分解成因式之积

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i Z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N} b_i Z^{-i}}=A\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-e_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-d_i z^{-1})}$$

物理实现时，a_i和b_i都是实数，因此如果有复数零极点，必共轭出现，因此分解为二阶多项式更合理

$$H_i(z)=\frac{1+\beta_{i1}z^{-1}+\beta_{i2}z^{-2}}{1+\alpha_{i1}z^{-1}+\alpha_{i1}z^{-2}},i=1,2,\cdots,N/2$$

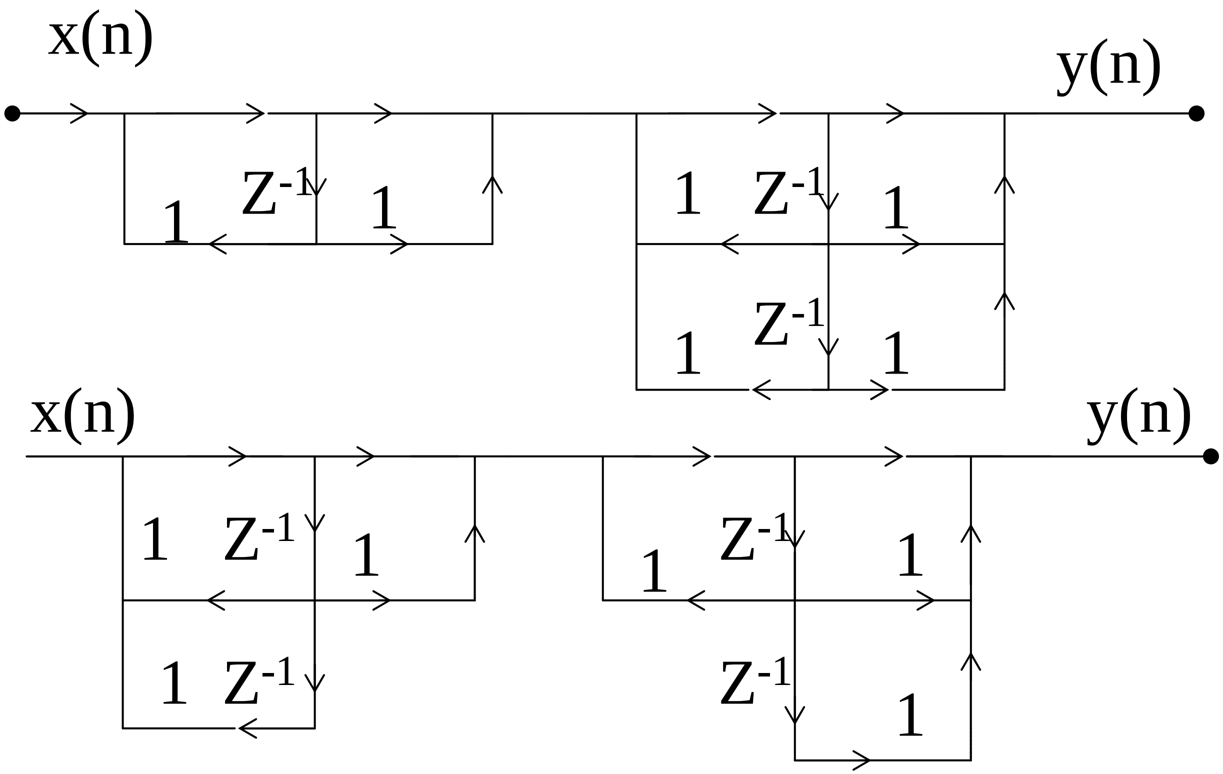
$$H(z)=H_1(z)H_2(z)\cdots H_{N/2}(z)$$

其中$H_i(z)$为子系统，可直接实现，$H(z)$为若干子系统级联

$$y(n)=(((x_1*h_1(n))*h_2(n))\cdots)*h_{N/2}(n)$$

6.IIR系统的信号流图—级联实现

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}}{1-2z^{-1}+z^{-3}}=\frac{(1+z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})(1-z^{-1}-z^{-2})}$$



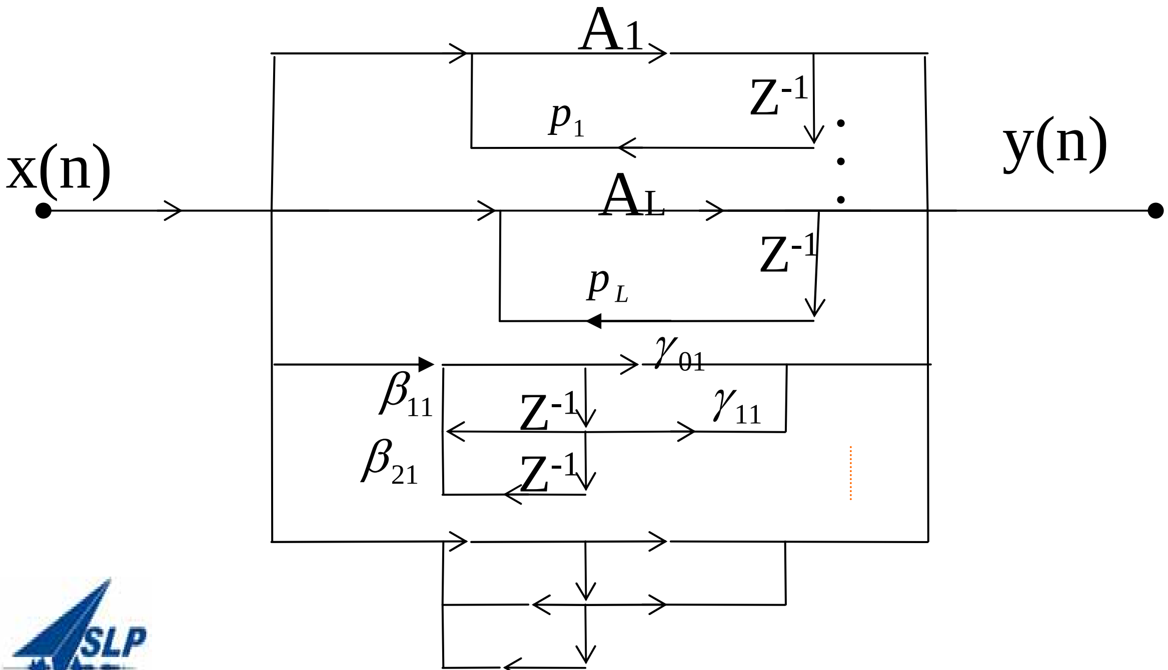
优点：较少的存储单元，只需要设计一个二阶程序，还可以分散系数误差造成的影响

6.IIR系统的信号流图—并联实现

- IIR系统：分解成因式之和

$$H(z)=\sum_{i=1}^{L}\frac{A_i}{1-p_i z^{-1}}+\sum_{i=1}^{M}\frac{\gamma_{0i}+\gamma_{1i}z^{-1}}{1-\beta_{1i}z^{-1}-\beta_{2i}z^{-2}}$$

$$y(n)=\sum_{i=1}^{L+M}\left[h_i(n)*x(n)\right]$$



优点：每一个子系统都是独立的，不受其他子系统量化误差及乘法舍入误差的影响，对误差最不敏感

6.IIR系统的信号流图—关于FIR系统

- FIR系统
  - 可以直接实现，也可以级联实现
  - 较少采用并联实现
  - 其他特殊结构：线性相位结构、频率抽样结构
- IIR和FIR都可以用Lattice结构实现，将来讨论

第二部分
Z变换与离散时间系统分析

- 1. Z变换的定义
- 2. Z变换的收敛域
- 3. Z变换的性质
- 4. 逆Z变换
- 5. LSI系统的转移函数
- 6. IIR系统的信号流图
- 7. Z变换求解差分方程

7.Z变换求解差分方程

- 双边z变换

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

- 单边z变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

若f(k)为因果序列，则单边、双边z 变换相等

- 时移性质的差别

双边z变换时移性质

$$\mathcal{Z}[y(n-k)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) z^{-m} z^{-k}=z^{-k} Y(z)$$

单边z变换的时移性质

$$\mathcal{Z}[y(n-k)]=\sum_{n=0}^{\infty} y(n-k) z^{-n}=\sum_{m=-k}^{\infty} y(m) z^{-m} z^{-k}$$

$$=z^{-k}\left(\sum_{m=0}^{\infty} y(m) z^{-m}+\sum_{m=-k}^{-1} y(m) z^{-m}\right)$$

$$=z^{-k}\left(Y(z)+\sum_{m=-k}^{-1} y(m) z^{-m}\right)$$

与y(k)在时间零点之前的值有关,可用于求解零输入响应. 单边Z变换可以看成是因果信号的双边Z变换.

7.Z变换求解差分方程

- LSI系统的全响应

1)因果序列时移后变成右边序列,可能变成非因果右边序列,响应的单边、双边z 变换不相等
2)实际物理信号或电路响应可看成右边序列,随时间0点的不同,因果性有变化
  a)如果时间0点(输入开始)之前系统有输出响应,则称为零输入响应
  b)如果时间0点(输入开始)之前系统没有输出,即系统初始状态为零,当给定输入后的响应称为零状态响应
  c)在给定输入下系统的全响应(总体响应)等于零输入响应与零状态响应之和

- 系统差分方程求解
  - 给定输入序列和输出的初始条件,求解完整的输入序列表达式,即差分方程求解问题
  - 用单边Z变换,此时系统的初始条件自然地包含于其代数方程中

一个LSI系统差分方程可以写成

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b(r)x(n-r)$$

初始条件为:已知$y(-M), y(-M+1), \cdots, y(-1)$不为零.求全响应

1)零输入响应,即$x(n)=0$,差分方程变成 $\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = 0$

两边取单边Z变换: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k)\right)z^{-n} = 0$

$\sum_{k=0}^{N} a(k)\sum_{n=0}^{\infty} y(n-k)z^{-n} = 0$,即 $\sum_{k=0}^{N} a(k)z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} y(n-k)z^{-(n-k)} = 0$

根据初始条件有

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)z^{-k}\left(\sum_{n=k}^{\infty} y(n-k)z^{-n-k} + \sum_{n=0}^{k-1} y(n-k)z^{-(n-k)}\right) = 0,\ \text{即}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a(k)z^{-k}\left(Y(z) + \sum_{n=0}^{k-1} y(n-k)z^{-(n-k)}\right) = 0,}$$

求出Y(z),再逆变换可得$y_{0i}(n)$,即零输入响应

7.Z变换求解差分方程

零输入响应方程：$\sum_{k=0}^{N} a(k)z^{-k}\left(Y(z)+\sum_{n=0}^{k-1} y(n-k)z^{-(n-k)}\right)=0$,即

$$Y(z)+\sum_{k=1}^{N} a(k)z^{-k}\left(Y(z)+\sum_{n=0}^{k-1} y(n-k)z^{-(n-k)}\right)=0$$

故$Y(z)=\dfrac{\sum_{k=1}^{N} a(k)z^{-k}\sum_{n=0}^{k-1} y(n-k)z^{-(n-k)}}{\sum_{k=0}^{N} a(k)z^{-k}}$

7.Z变换求解差分方程

例：令$y(n)-ay(n-1)=u(n)$，$y(-1)=1$，求$y(n)$

解：先求零输入响应

$$Y(z)=\frac{az^{-1}y(-1)z}{1-az^{-1}}=\frac{a}{1-az^{-1}},\text{则零输入响应}y_{0i}(n)=a^{n+1}u(n);$$

求零状态响应时，令$y(-1)=0$;对差分方程两边取双边Z变换

$$Y(z)=\frac{U(z)}{1-az^{-1}}=\frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}},\text{用部分分式法求逆Z变换可得到}$$

$$\text{零状态响应为}y_{0s}(n)=\frac{a^{n+1}}{a-1}u(n)-\frac{u(n)}{a-1}=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}u(n)$$

$$\text{因此总响应为}y(n)=y_{0i}(n)+y_{0s}(n)=\frac{a^{n+2}-1}{a-1}u(n)$$

与本章有关的matlab文件

- Matlab定义习惯

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b(1)+b(2)z^{-1}+b(3)z^{-2}+\cdots+b(n_b+1)z^{-n_b}}{1+a(2)z^{-1}+a(3)z^{-2}+\cdots+a(n_a+1)z^{-n_a}}$$

分子和分母系数分别用行向量表示

- 常用函数文件
  - filter.m: y=filter(b,a,x);
  - impz.m: h=impz(b,a,N);
  - freqz.m: [H,w]=freqz(b,a,N,'whole',Fs);
  - zplane.m: zplane(z,p) or zplane(b,a);
  - …

matlab实践

- 回声效果
  - 分析山谷回声形成的原因
  - 能否用系统函数加以描述
  - 动手做一做？