# 数字信号处理
# Digital Signal Processing

付中华

mailfzh@nwpu.edu.cn

http://www.nwpu-aslp.org/gary/

# 教材与参考书

- 教材：《数字信号处理（第二版）》
  - 西北工业大学出版社
  - 俞卞章 主编
- 推荐参考书
  - 《数字信号处理—理论、算法与实现（第二版）》
    - 清华大学出版社
    - 胡广书

# 讲授内容与学习方法

- 以基本理论和方法为主，兼顾应用和实践
  - 第1章 离散时间信号、系统和Z变换
  - 第2章 DFT及其快速算法
  - 第3章 数字滤波器设计
  - 第4章 离散随机信号的处理
- 讲授重在引导和启发，自学和实践为根本要务
  - 重要的是建立起清晰的概念
  - 关键的是探究问题的实质
  - 有趣的是实践的验证

# 课程考核

- 考勤：不定时抽查 （三次不到不能参加期末考试）
- 作业：课后布置的习题
- 考试：闭卷考试 （45分以下重修，45分—59分补考）

科学的态度需要严谨和认真！！

用敏锐的目光去发现问题其乐无穷！用广博的知识解决问题其乐无穷！用自己的努力造福人类其乐无穷！

# 绪论

- 关于数字信号处理digital signal processing
  - 数字计算机、通用\专用数字处理器
  - 利用计算机或专用处理设备，以数值计算的方法对信号进行采集、变换、估值与识别等加工处理，借以达到提取信息和便于应用的目的
  - 数字(digital) VS. 模拟 (analog) ??
    - 灵活、精确、抗干扰、尺寸、造价、速度……
    - 能替代么？
  - 几乎所有的工程技术领域都要涉及信号问题
    - 电、磁、机械、热、声、光、生物医学……
    - 是理论学习走向实用的基石

# 绪论

- 数字信号处理理论
  - DSP是长在许多基础理论根基之上的应用理论
    - 数学：微积分、概率与统计、随机过程、高数、数值分析、近世代数、复变函数、矩阵论……
    - 系统：信号与系统、通信理论、故障诊断、人工智能、模式识别、神经网络
  - 1965年快速傅里叶变换（FFT）为标志，已形成较为完整的理论体系
  - 以此为根基
    - 确定信号、平稳随机信号、时变信号、一维与多维信号、单通道与多通道信号
    - 现代信号处理技术，博大精深、与时俱进

# 绪论

- 数字信号处理理论包括
  - 信号的采集
  - 离散信号的分析
  - 离散系统分析
  - 信号处理的快速算法
  - 信号的估值理论
  - 滤波技术
  - 信号的建模
  - 特殊算法
  - 软件与硬件实现
  - 信号处理技术的应用

语音、雷达、声纳、地震、图像、通信、系统控制、生物医学、机械振动、遥感遥测、地质勘探、航空航天、电力系统、故障检测、自动化仪器、多媒体技术……

# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

# 1. 离散时间信号的基本概念

- 离散信号概述
  - *x(t)*信号与数学中的函数
    - i.e. 正弦信号、正弦函数
    - 物理解释、数学描述
    - *x*？物理量， 实数？复数？
    - *t*？物理量，连续？离散？
  - 通常都使用传感器把这些真实世界的物理信号转换成电(电压或电流)信号
  - *t* 常表示时间
    - *t* 若是连续变量, x(t)成为**连续时间信号**(模拟信号)
    - *t* 若是离散变量, x(t)为**离散时间信号**, 如果t在时间轴等间隔定义(间隔$T_s$ 抽样周期), 则*x(t)*记为$x(nT_s)$

计算机中如何存储信号？例如语音、音乐、图像？

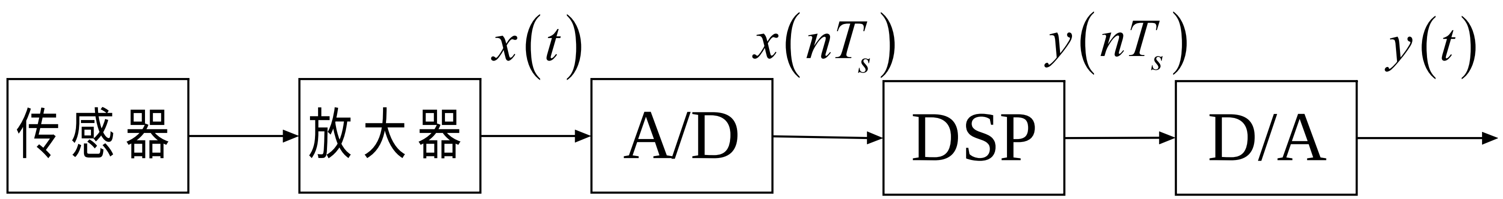
离散信号≠离散时间信号

# 离散信号概述

- $x(nT_s)$
  - $T_s$ 可以是1ms,1s, 1H, 1Day, 1Month, ……
  - 进行抽象和简化, 将$T_s$抽象为1个单位, 则$x(nTs)$简记为$x(n)$
    - 注意: $T_s$ 非常重要, 如果发生变化, 描述信号时最好带上
- 连续信号(模拟信号)=>离散时间信号=>离散信号(数字信号)
  - t的连续化&x的连续化=>t的离散化& x的离散化
  - 模拟analog转换数字digital (A/D或AD, D/A或DA)

# 离散信号概述

- dsp的实际过程



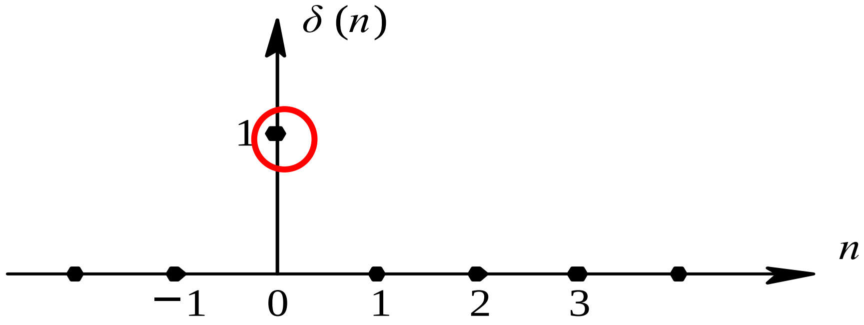

关于这幅图，你能想到些什么问题?

- 数字音频处理的步骤分析
- 数字图像处理的步骤分析

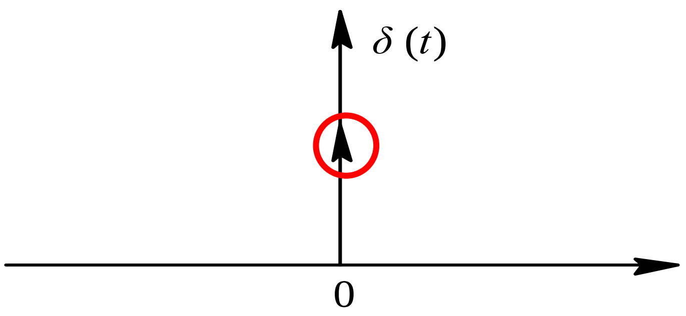
# 典型离散信号

- 1.单位抽样信号 $\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & 其它\end{cases}$

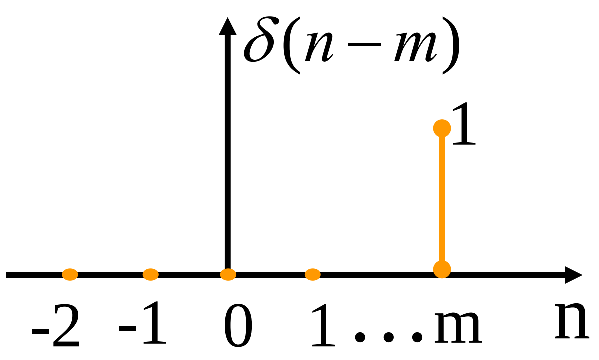
$\boxed{想想单位冲激信号\delta(t)}$



( a )



( b )




$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

# 典型离散信号

- 2.脉冲串序列/单位抽样序列

$$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$$

想想冲激串序列$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

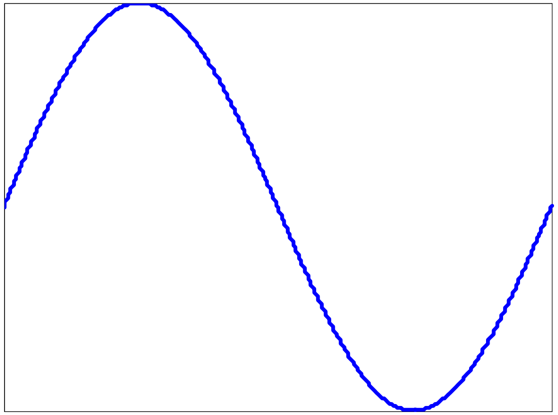
- 如果将连续信号x(t)与p(t)相乘, 结果??

$$x(nT_s)=x(n)=x(t)p(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

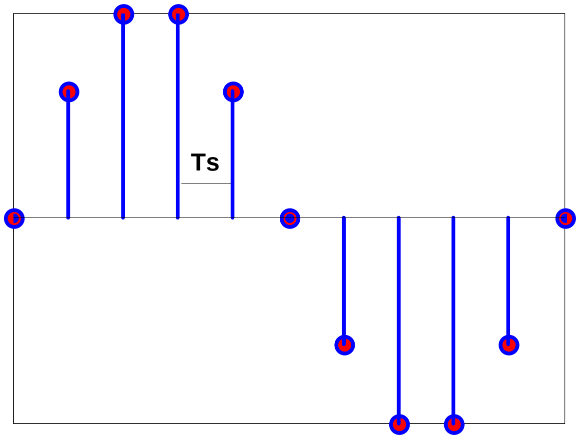
你能发现什么问题?

# 典型离散信号

- 单位冲激信号及抽样示意图



$x(t)$




$x(n)$

试试看，用matlab画出上面两幅图

想一想，这个正弦的频率是多少?

# 典型离散信号

- 3.单位阶越序列
  - y(n)=x(n)u(n)

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

- 4.正弦序列

$$x(n)=A\sin\left(2\pi fnT_s+\varphi\right)$$

$f$是信号自身频率,单位为Hz

令$\Omega=2\pi f$,则$\Omega$的单位是$rad/s$,对应连续信号$x(t)$的连续角频率变量,当$f$由$-\infty$至$+\infty$时,$\Omega$也由$-\infty$至$+\infty$

# 典型离散信号

- 4.正弦序列 $x(n)=A\sin(2\pi fnT_s+\varphi)$

$f$是信号自身频率,单位为Hz
令$\Omega=2\pi f$,则$\Omega$的单位是$rad/s$,对应连续信号$x(t)$的连续角频率变量,当$f$由$-\infty$至$+\infty$时,$\Omega$也由$-\infty$至$+\infty$

信号自身频率可以无限的大, 所以f和Ω也可以无限的大!

$T_s$是抽样间隔,或抽样周期,则$f_s=1/T_s$为抽样频率
注意，抽样频率$f_s$仅取决于A/D变换器,与信号本身频率无关

# 典型离散信号

- 4.正弦序列 $x(n)=A\sin\left(2\pi fnT_s+\varphi\right)$

如果把离散时间变量$n$分离出来,正弦序列变成$n$的函数

$x(n)=A\sin\left(\omega n+\varphi\right)$

则$\omega=2\pi fT_s=2\pi f/f_s$

$\omega$以$2\pi$为周期,称为圆周频率或圆频率,因其与离散时间变量$n$的关系称为相对于离散信号$x(n)$的角频率变量,单位是rad

想想$\omega$与哪些因素有关?

即与连续信号自身频率$f$有关,又与采样频率$f_s$有关

类似的,可以定义离散信号$x(n)$的离散(数字)频率为

$f'=\omega/2\pi=f/f_s$,称为归一化频率

# 典型离散信号

- 5.复正弦序列(非常重要)

$$x(n)=e^{j\omega n}=\cos(\omega n)+j\sin(\omega n)$$

- 6.指数序列 $x(n)=a^{|n|}$

如果$a$是复数,用极坐标形式$a=re^{j\omega_0}, r>0, \omega_0\neq 0,\pi$

$$x(n)=r^{|n|}e^{j\omega_0|n|}$$

想想与复正弦信号的关系

# 离散信号的运算

- 1.信号的延迟

$y_1(n)=x(n-k)$和$y_2(n)=x(n+k)$哪一个左移,哪一个右移画图看看

序列$x(n)$在某一时刻$k$时的值可以用$\delta(n)$的延迟来表示

$x(k)=x(n)\delta(n-k)$

说明$\delta(n)$有抽取的特点

记住这个描述离散信号的方法,在公式推导时非常有用

进而,所有$x(n)$的值可以表示为

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

$x(n)$与$\delta(n)$的卷积还是$x(n)$

# 离散信号的运算

- 2.两个信号相加与相乘

$$x(n)=x_1(n)+x_2(n)$$

$$y(n)=x_1(n)x_2(n)$$

$$y(n)=c\cdot x(n)$$

- 3.信号时间尺度的变化

对连续信号$x(t)$,令$y(t)=x(t/a)$,变宽?变窄?

对离散信号$x(n)$,令$y(n)=x(Mn)$,会怎样?

分析时注意离散信号自变量必须是整数!
必要时可以把$T_s$引入

$M=-1$时,变成时间轴的翻转

# 离散信号的运算

- 例: 把一个离散信号$x(n)$分解成一个偶对称序列和一个奇对称序列之和

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

只需要令

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$

有趣且有用的一种分解技术,偶对称序列和奇对称序列有很多有用的性质

# 离散信号的运算

- 4.信号的分解

设$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_K$是一组基向量,对任意给定信号$x$,将其分解为这组基向量的加权和,即

$$x = \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_k$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_K$为分解系数,可以看成$x$在各个基向量上的投影. 如果$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_K$两两正交,则为正交展开或正交分解

这一观点非常重要,许多学过的或将要学到的变换都可以看成某种基向量上的正交展开,逆变换同样也是. 这种将一个实际的物理信号分解为有限或无限个小的信号的 “细胞”是信号分析和处理的有力工具

把复杂信号变成简单信号的叠加,把无法解析描述的信号变成解析信号的叠加,把非线性问题变成许多线性问题的叠加…… 重要的思想

# 关于离散正弦信号的周期

- 形如$x(n)=sin(\omega n)$的离散正弦信号未必是周期信号

  连续信号$x(t)=\sin\left(2\pi ft\right)$的周期为$T=1/f$,$T$可以是小数但经过抽样之后,周期表示一秒钟抽样次数,必为整数,如$N$,反之,如果周期不为整数,则必然不是通过抽样得到的离散信号

  考虑：（1）$x(n)=\sin(0.01\pi n)$　（2）$x(n)=\sin(5n)$

（1）$T=2\pi/0.01\pi=200$,为整数,是周期信号

（2）$T=2\pi/5$,非整数,不是严格意义的周期信号

产生离散正弦类信号是,应始终保持周期为整数

# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

# 2.信号的分类

- 连续时间信号和离散时间信号
  - 区别在于时间变量的性质
- 周期信号和非周期信号

周期信号：

$x(n)=x(n\pm kN)$, $k$和$N$均为正整数，$N$为周期

非周期信号：周期为无限大

记住这个描述，可以用来解释为何非周期信号的傅立叶频谱是非离散的

# 2.信号的分类

- 确定性信号和随机信号
  - 确定性信号

    信号$x(n)$在任意$n$时刻的值若能被精确的确定(或预测)
  - 随机信号

    信号$x(n)$在时刻$n$时刻的值是随机的，不能精确预测

随机变量的函数也是随机信号

每一次测量或重复都不一定一样，例如不断的投掷硬币，得到正反面的结果序列

随机：平稳/非平稳随机信号

平稳：各态遍历/非各态遍历

# 2.信号的分类

- 能量(Energy)信号和功率(Power)信号
  - 信号能量（总能量）的定义：

连续信号： $E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$

离散信号： $E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(t)|^2$

注意两者的形式，从连续到离散

$\int \Rightarrow \sum$， $t \Rightarrow n$， $dt \Rightarrow \Delta t = T_s = 1$

如果总能量$E<\infty$，则称信号为能量有限信号，简称能量信号

能不能举出例子？
如 $\sin(\omega t), \exp(-x^2)$

# 2.信号的分类

- 能量(Energy)信号和功率(Power)信号
  - 信号功率（平均能量）的定义：

连续信号： $P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|x(t)\right|^2 dt$

离散信号： $P=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|x(n)\right|^2$

周期信号和非周期信号的统一形式

特别的对周期信号：

连续周期信号： $P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left|x(t)\right|^2 dt$，周期为$T$

离散周期信号： $P=\frac{1}{N}\sum_{n=-0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2$，周期为$N$

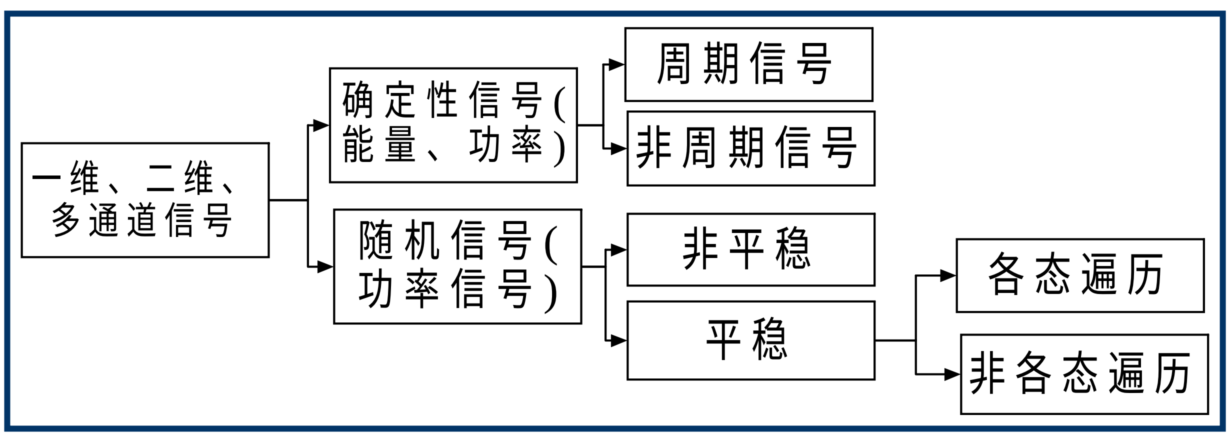
周期信号是能量信号？功率信号？

# 2.信号的分类

- 一维信号、二维信号及多通道信号
  - 一维函数x(n)、二维函数x(n,m)
    - 自变量是一/多维，函数值是一维标量
  - 多维信号
    - 向量

$$\mathbf{X}=\left[x_1(n),x_2(n),\cdots,x_m(n)\right]^T=\mathbf{X}\left(n\right)$$

    - 自变量是一/多维，函数值是多维向(矢)量



# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

# 3.噪声

- 噪声几乎是无处不在
  - 50Hz工频噪声、电磁辐射、热噪声、A\D转换时的量化噪声、有限精度
  - 噪声处理是信号处理的重要内容
- 噪声干扰关系
  - 加性噪声： $x(n)=s(n)+d(n)$
  - 乘性噪声； $x(n)=s(n)d(n)$
  - 卷积噪声……
- 噪声是相对的
  - 与应用有关，如孕妇心电图

# 3.噪声

- 常用的噪声模型
  - 白噪声(white noise)
    - 源于白色光, 即含有所有频率成分,且所有频率成分功率相同，通常假设期望为0, 因此功率常用方差表示
    - 常用统计的方法分析
      - 高斯白噪声
      - 均匀分布白噪声
      - ……
  - 有色噪声(colored noise)
    - 不包含所有频率成分, 或说各个频率成分的功率不同
  - 脉冲噪声(impulse noise)
    - 突发的短时噪声

# 3.噪声

- 信噪比(SNR, signal-to-noise ratio)
  - 信号与噪声的功率比
  - 常用分贝的形式, 定义如下

$$SNR = 10 * \lg\left(\frac{P_s}{P_d}\right) \quad (dB)$$

  - 算一算 (作业, 注:下堂课抽查)
    - 1) SNR=30dB时,信号和噪声的功率比为多少
    - 2) 若信号为 $s(n) = A\sin\left(2\pi fnT_s + \varphi\right)$ ,其中$A = 3$ ,白噪声方差为 $P_d = \sigma_d^2 = 0.01$ , 则SNR=?

# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

# 4.信号空间(了解与自学)

- 可以理解为函数空间
  - 把线性代数和泛函分析中有关空间及空间元素度量引入
  - 方便用数学的方法和更多的数学工具
  - 考虑一下
    - 两个矢量的距离,欧氏(欧几里德)距离合适吗?
    - 任意曲面上两点的距离

# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

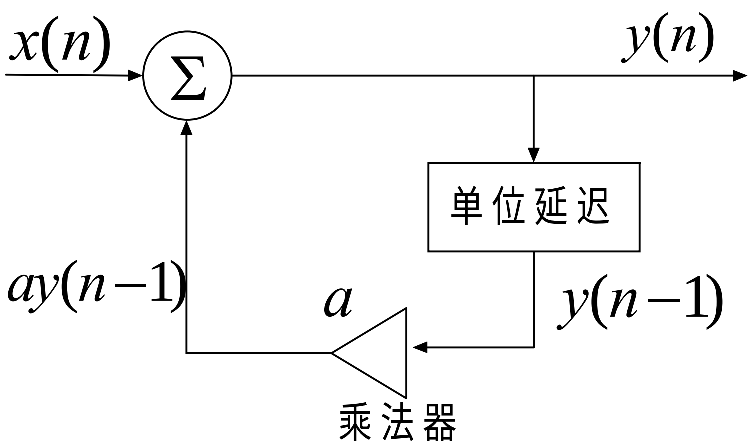
- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

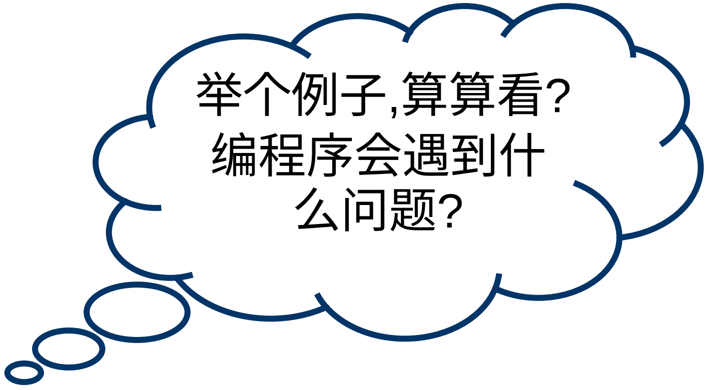
# 5.离散时间系统的概念

- 离散时间系统
  - 若输入序列x(n),经过系统处理,得到输出序列y(n)

$$y(n)=T\left[x(n)\right]$$

  - *T*[]是一种变换?一种映射?一个数学函数?
  - 例如
    - (1) $y(n)=ay(n-1)+x(n)$



# 5.离散时间系统的概念

- 单位抽样响应 (记得单位冲激响应吗?)
  - 如果离散系统的输入是 $\delta(n)$ , 得到的系统输出y(n)就是系统的单位抽样响应,记为h(n)
  - h(n)直接反映了系统自身的固有特性,是系统输入输出关系的描述
  - 注意: 系统自身的特性与具体的输入信号无关, 即知道h(n), 如果给定任意输入,都可以预测出响应的输出
  - 例子: 如果系统的输入输出满足

$$(1)\ y(n)=ay(n-1)+x(n);\ (2)\ y(n)=\sum_{k=0}^{2}b(k)x(n-k)$$

分别计算系统的h(n)?

# 5.离散时间系统的概念

- 单位抽样响应 (记得单位冲激响应吗?)
  - 如果离散系统的输入是$\delta(n)$ ，得到的系统输出y(n)就是系统的单位抽样响应,记为h(n)
  - h(n)直接反映了系统自身的固有特性,是系统输入输出关系的描述
  - 注意: 系统自身的特性与具体的输入… 道h(n), 如果给定任意输入,都可以… 出
  - 例子: 如果系统的输入输出满足

$$(1)\ y(n)=ay(n-1)+x(n);\ (2)\ y(n)=\sum_{k=0}^{2}b(k)x(n-k)$$

分别计算系统的h(n)?

考虑一下,系统参数不同,输出有什么变化

# 5.离散时间系统的概念

- FIR系统与IIR系统
  - FIR (finite impulse response):有限冲激响应
    - h(n)为有限长, 其他为零
  - IIR (infinite impulse response):无限冲激响应
    - h(n)为无限长
- 关于离散系统的若干重要定义
  - (1)线性

设一个离散系统对$x_1(n)$的响应是$y_1(n)$，对$x_2(n)$的响应是$y_2(n)$

即$y_1(n)=T\left[x_1(n)\right], y_2(n)=T\left[x_2(n)\right]$.如果对$\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)$的响

应是$\alpha y_1(n)+\beta y_2(n)$,即

$$y(n)=T\left[\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)\right]=\alpha T\left[x_1(n)\right]+\beta T\left[x_2(n)\right]=\alpha y_1(n)+\beta y_2(n)$$

则称该系统为线性系统

# 关于离散系统的若干重要定义

- (1)线性

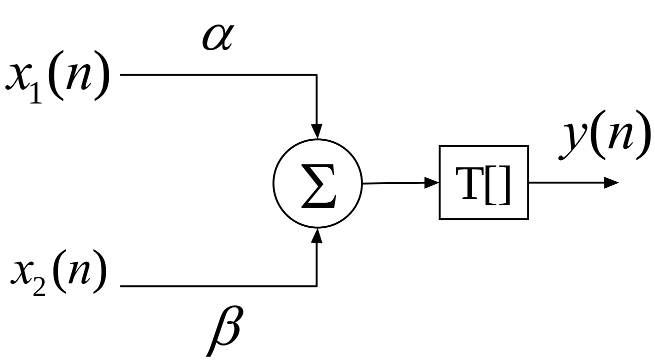
任意线性组合

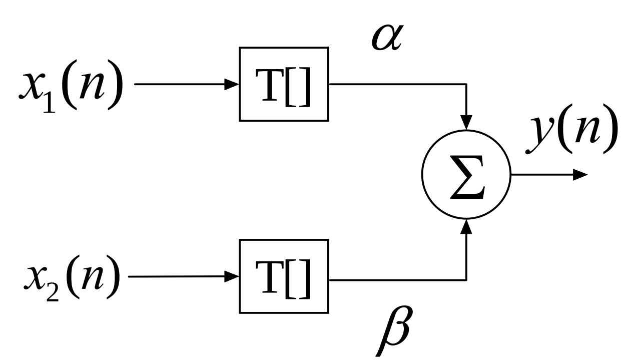
设一个离散系统对$x_1(n)$的响应是$y_1(n)$，对$x_2(n)$的响应是$y_2(n)$

即$y_1(n)=T\left[x_1(n)\right], y_2(n)=T\left[x_2(n)\right]$.如果对$\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)$的响应是$\alpha y_1(n)+\beta y_2(n)$,即

$$y(n)=T\left[\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)\right]=\alpha T\left[x_1(n)\right]+\beta T\left[x_2(n)\right]=\alpha y_1(n)+\beta y_2(n)$$

则称该系统为线性系统



# 关于离散系统的若干重要定义

- 移不变性

如果离散系统满足

$$T\left[x(n)\right]=y(n)$$

$$T\left[x(n-k)\right]=y(n-k)$$

则该系统具有移不变性

只要输入信号一样,无论何时输入，输出信号形态保持不变

通过h(n)就能看出系统是否移不变,此时假定的输入是 $\delta(n)$

例子: 判断下列系统是否线性系统?是否移不变系统

(1) $y(n)=nx(n)$

(2) $y(n)-ay(n-1)=x(n),\quad y(-1)=0;n\geq 0$

即线性又移不变的离散时间系统称为线性移不变离散时间系统(LSI, linear shift invariant), 简称LSI系统

# 关于离散系统的若干重要定义

- 因果性
  - 如果一个LSI系统在任意时刻n的输出只取决于现在时刻和过去时刻的输入x(n),x(n-1),x(n-2),……有关,则该系统为因果系统
    - 试着证明一下: 如果h(n)在n<0时恒为0,则系统为因果系统
  - 实时信号处理时,只有因果系统可以物理实现
  - 非实时处理处理时,非因果系统可以实现
- 稳定性
  - 有界信号: $|x(n)| \le R, \forall n, \exists R$
  - 如果x(n)有界时,y(n)也有界,则系统是稳定的(stable)

# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

# 6.LSI系统的输入输出关系

- 连续的LSI系统
  - 输入x(t)和输出y(t)之间可以用常系数线性微分方程来描述
- 离散的LSI系统
  - 输入x(n)和输出y(n)之间可以用常系数线性差分方程来描述

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a(k)y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b(r)x(n-r)$$

$a(k),b(r)$为方程系数,或系统参数

给定$x(n)$和系统的初始条件,可以求出差分方程的解$y(n)$

差分方程求解将在后面讲解, 这里考虑IO之间的一个重要关系——线性卷积

# 6.LSI系统的输入输出关系

因为$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$

$$=\cdots+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots$$

而且,当$x(n)=\delta(n)$时,输出$y(n)=h(n)$,根据LSI的性质

| 输入: | 输出: |
| --- | --- |
| $x(0)\delta(n)$ | $x(0)h(n)$ |
| $x(1)\delta(n-1)$ | $x(1)h(n-1)$ |
| $x(-1)\delta(n+1)$ | $x(-1)h(n+1)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $+\quad x(k)\delta(n-k)$ | $+\quad x(k)h(n-k)$ |
| $x(n)$ | $y(n)$ |

这说明了为什么h(n)
很重要,以及为什么
卷积运算很重要.
考虑不同的应用关
注的不同, h(n)?
y(n)? x(n)

所以 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$

称为LSI系统的线性卷积,
简记为$y(n)=x(n)*h(n)$

# 6.LSI系统的输入输出关系

- LSI系统的输入输出关系

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

线性卷积性质

$$\left(x_1(n)+x_2(n)\right)*h(n)=x_1(n)*h(n)+x_2(n)*h(n)$$

如果是因果LSI系统,即$n<0$时,$h(n)\equiv 0$,则

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

如果$x(n)$序列长度为$N$,$h(n)$的长度是$M$,则卷积结果长度为 $N+M-1$

# 6.LSI系统的输入输出关系

- 线性卷积的计算

例:设$h(n)=\{h(0),h(1)\}=\{1,1\}, x(n)=\{x(0),\cdots,x(3)\}=\{1,2,3,4\}$

求两者的线性卷积

思路

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\tilde{h}(k)=? \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\tilde{h}(k+1)=? \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\tilde{h}(k-1)=?$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\tilde{h}(k+2)=? \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\tilde{h}(k-2)=? \quad \cdots$$

$\tilde{h}(k)=h(-k)$意味着什么?画图解释更方便

计算机程序怎么实现?输入?输出?时间坐标?原点?

再试试: $x(n)=b^n u(n), h(n)=a^n u(n)$,求$y(n)$

# 6.LSI系统的输入输出关系

- 利用卷积关系证明系统稳定性判断法则
  - 一个LSI系统是稳定的充要条件是

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$$

充分性:

$$\left|y(n)\right|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)\right|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x(k)h(n-k)\right|$$

如果$x(n)$有界,即$\exists R$,使得$\left|x(n)\right|\le R$

于是$\left|y(n)\right|\le R\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(n-k)\right|$有界,故系统稳定

必要性:

构造$x(n)=\begin{cases}h^*(-n)/\left|h(-n)\right| & 满足\left|h(-n)\right|\ne 0的所有n\\ 0 & 其他\end{cases}$

这时$y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|^2/\left|h(k)\right|$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|$,因为系统稳定,故$y(0)$有界,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$$

# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

# 7.LSI系统的频率响应

- 考虑输入为复正弦信号 $e^{j\omega n}$ 时LSI系统的输出

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x\left(n-k\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{j\omega(n-k)}=\boxed{e^{j\omega n}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}=e^{j\omega n}\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)}$$

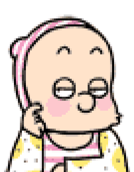
与输入信号完全一致

LSI系统产生的影响,仅与系统有关

称$H(e^{jw})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}$为系统的频率响应,又称系统的特征值

实际是离散序列h(k)的傅里叶变换(DTFT)

想想频率响应是谁的函数,能不能画个图看看?



# 7.LSI系统的频率响应

输入为$e^{j\omega n}$,输出为$e^{j\omega n}H(e^{jw})$

因为复正弦的这一特性质,称其为特征函数(信号)

- 因为$H(e^{jw})$是复值函数,又可以表示为

$$H(e^{jw})=H_R(e^{jw})+H_I(e^{jw})$$

$$H(e^{jw})=\left|H(e^{jw})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$H_R(e^{jw})$:实部　　$H_I(e^{jw})$:虚部

$\left|H(e^{jw})\right|$:幅频响应　　$\varphi(\omega)$:相频响应

试着推导一下它们之间的联系

# 7.LSI系统的频率响应

- LSI的单位抽样响应 $h(n)$
  - 输入为单位抽样信号 $\delta(n)$时系统的时域响应
- LSI的频率响应 $H\left(e^{j\omega}\right)$
  - h(n)的傅立叶变换 $H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$ 是ω的函数
- LSI的转移函数 $H(z)$

如果定义$z=e^{j\omega}$

则$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$

这三个函数的自变量有什么特点？能不能用图的方式描述之？

$h(n)$，$H\left(e^{j\omega}\right)$，$H(z)$是描述一个LSI系统的三个重要函数

它们之间实际是同一件事物的不同反映

设计、估计、分析这三个函数是DSP的主要内容

# 7.LSI系统的频率响应

- 系统的分析与综合
  - 分析(analysis)：
    - 给定一个系统(如单位抽样响应,频率响应,传递函数,或者差分方程(实际定义的是传递函数),或者信号流图,或者给定输入信号下的输出),研究其特性,预测输出,系统的实现以及状态描述等
  - 综合(synthesis)
    - 给定若干技术指标,设计出一个离散系统使之达到或接近这些技术指标

# 第一部分
# 离散时间信号与离散时间系统

- 1. 离散时间信号的基本概念
- 2. 信号的分类
- 3. 噪声
- 4. 信号空间*
- 5. 离散时间系统的基本概念
- 6. LSI系统的IO关系
- 7. LSI系统的频率响应
- 8. 确定性信号的相关函数
- 9. 关于Matlab

# 8.确定性信号的相关函数

- 如何定义两个信号的相似性?或者信号自身的自相似性?
- 考虑两个确定的因果能量信号, 如果定义

$$\rho_{xy}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}x(n)y(n)}{\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^2(n)\sum_{n=0}^{\infty}y^2(n)\right]^{1/2}}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}x(n)y(n)}{\boxed{E_xE_y}}$$

能量归一化

由许瓦兹不等式可以知道$\left|\rho_{xy}\right|\le 1$

如果$x(n)$与$y(n)$完全相关(相等), $\rho_{xy}=1$

如果$x(n)$与$y(n)$完全无关, $\rho_{xy}=0$

问题是如果y(n)仅是x(n)的平移呢? 如sin和cos

# 8.确定性信号的相关函数

## 相关函数的定义

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+m)$$

为$x(n)$和$y(n)$的互相关函数(同理可以定义自相关函数)

该式表示,$r_{xy}(m)$在时刻$m$时的值,等于将$x(n)$保持不动而$y(n)$左移$m$个抽样周期后两序列对应相乘再相加的结果

或信号$x$第$n$时刻的值与信号y第$n+m$时刻的值对齐相乘,再把所有时刻相乘的结果求和

注意:$r_{xy}(m)\neq r_{yx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)x(n+m)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}y(l-m)x(l)=r_{xy}(-m)$

类似的,定义自相关函数

$$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+m)$$

是信号自相似性的一种度量

# 8.确定性信号的相关函数

- 考虑自相关函数的一些特点

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+m)$$

  - r(0)=? 是什么含义

$$\boxed{r(0)=\sum_{-\infty}^{\infty}x^2(n)}$$

试着自己分析一下一个周期为$N$的正弦信号$\sin(\omega n)$的自相关函数是什么样子,推导一下画画图验证一下看

  - 周期函数的自相关函数有什么特点?

$$\boxed{r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+(m+N))=r_{xx}(m+N)}$$

也是周期的?!而且周期相同!能不能分析一下这个周期函数的特点?这个性质可不可以用来检测周期性?

# 8.确定性信号的相关函数

- 考虑自相关函数的一些特点

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+m)$$

  - r(0)=? 是什么含义

$$\boxed{r(0)=\sum_{-\infty}^{\infty}x^2(n)}$$

能证明实信号的自相关函数是实偶函数吗?

  - 周期函数的自相关函数有什么特点?

$$\boxed{r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+(m+N))=r_{xx}(m+N)}$$

也是周期的?!而且周期相同!能不能分析一下这个周期函数的特点?这个性质可不可以用来检测周期性?

# 8.确定性信号的相关函数

- 相关函数与线性卷积运算的比较

$x(n)$和$y(n)$的互相关函数 $$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+m)$$

$x(n)$和$y(n)$的卷积 $$c_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(m-n)$$

$$\boxed{\begin{aligned}r_{xy}(m)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+m)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l-m)y(l)\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}t(m-l)y(l)=t(m)*y(m)=x(-m)*y(m)\end{aligned}}$$

两者形式上的相似只能说明计算上的管理,物理意义完全不同

# 实践

- 计算机中的信号
  - 未压缩
  - 压缩
- Matlab
  - 数字信号与矢量
  - 运算
  - 绘图
  - 实际可计算与理论模型
    - 有限
    - 数学抽象

试着生成一个指定频率的正弦波信号,加上一定SNR的白噪声,再计算一下自相关函数,能得到哪些收获?